3.2 KANTOROV TRIADNI SKUP


Fig.3.5: Georg Kantor rodonačelnik teorije skupova

Kantor (Georg Cantor,1845-1918-nemački matematičar, rođen u Rusiji) je zasnovao teoriju skupova, a među mnogim skupovima i jedan od posebne važnosti za fraktalnu mehaniku, poznat u nauci kao Kantorov *triadni skup* (*T*). Kasnije su naučnici razvili različite varijante ovog skupa, ali dve najpoznatije su: *uniformni* i *random* Kantorov triadni sup.

3.2.1 UNIFORMNI KANTOROV TRIADNI SKUP

U matematici se smatra da se, na osnovu Kantor-Dedekindovog aksioma, mogu svi realni brojevi obostrano jednoznačno prikazti tačkama jedne prave, na kojoj su fiksirane tačke 0 i 1, uključujući i duž 01 kao jedinicu *mere*. Na osnovu ovog aksioma dobija se Kantorov *uniformni triadni skup* tako što se ma kojem nizu

$a_1, a_2, a_3 ...... a_n$

sastavljenom od 0 ili 1, u formi skupa $\{0,1\}_{1(N)}$ pridruži realan broj

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n)\cdot 3^{-n}$$

koji će se preslikati na skup T (triadni skup).

U cilju što jednostavnijeg predočavanja trijadnog skupa i navedenog preslikavanja posmatrajmo dobijanje triadnog skupa iz segmenta $[0,1]_{C1}$ svih realnih brojeva $0 \leq x \leq 1$ na sledeći način (Fig. 3.6): neka se segment [0,1] raspadne na tri jednaka dela, pa brisanjem srednjeg intervala dužine 1/3 preostaju još dva segmenta [0,1/3] i [2/3,1], svaki dužine 1/3. U drugom koraku uradićemo sa preostalim segmentima isto kao sa početnim, tj. svakog ćemo podeliti na tri jednaka dela i izbaciti srednji interval (tako da krajevi izbačenih intervala 1/3, 2/3 u prvom koraku, kao i svi ostali krajevi izbačenih intervala u narednim koracima, uvek ostaju neizbačeni). U sledećem koraku imaćemo četiri neizbačena intervala: [0,1/9],

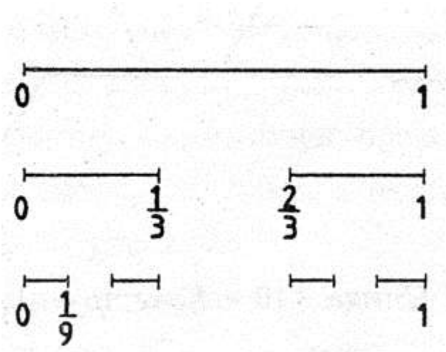


Fig.3.6: Dobijanju Katorovog trijadnog skupa iz segmenta [0,1]

[2/9,3/9], [6/9,7/9] i [8/9,1], a u narednom osam i tako redom.

Uočavamo da se u prvom koraku izbacuje interval $1\times1/3$, u drugom $2 \times 1/3^2$, u trećem $4 \times 1/3^3$ itd., što se može zapisati u obliku

$$\frac{2^0}{3^1}+\frac{2^1}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{2^3}{3^4}+\frac{2^4}{3^5}+....+\frac{2^n}{3^{n+1}}=\frac{2^0}{3^1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{2^0}{3^1}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1\cdot \qquad 3.22$$

Vidimo da ni jedan od brojeva skupa *T* nije izbačen, pa je triadski skup *T* smešten na segmentu [0,1] tako da oni intervali koji ne pripadaju skupu *T*, ali kojima krajevi leže u *T* imaju ukupnu dužinu jednaku 1, dakle isto koliko i sam segment [0,1]. Zbog ove osobine *mera* skupa *T* jednaka je 0, mada mu je kardinalni (glavni broj) isti koliki je i kardinalni broj čitavog linernog kontinuma ($2^{\aleph_0}=c_1$), numeričke prave R^1 (Dauben,1990, Kurepa, 1951). Dakle, *dužina* triadnog skupa je 1, mada je njegova *mera* 0.

Ovaj rezultat zvuči još paradoksalnije nego onaj u matematici koji govori da prostor ima isto onoliko tačaka koliko ih ima ma koji segment na brojnom pravcu R^1. Ovaj rezultat po svojoj neobičnosti prevazilazi i rezultat dobijen u teoriji brojeva da je *nula faktorijal* (!) = 1. Međutim, ovim Kantorovim rezultatem je „uspostavljen onaj sklad što ga imamo u vidu, kada govorimo o prostorima raznih dimenzija, a koji su, što se tiče pitanja broja tačaka, svi međusobno isovetni" (Kurepa,1951). Drugim rečima, triadni skup *T*, čija je *mera* 0 ima isti broj tačaka kao i sveukupni prostor. Medjutim, treba imati u vidu da ne postoji obostrano jednoznačno i obostrano neprekidno preslikavanje među prostorima, pa ni između triadnog skupa i višedimenzionalnih prostora, iako svi imaju isti broj tačaka.

U literaturi se obično piše 1/3 umesto $2^0/3^1$, što je kvantitativno isto, pa se zato ovaj skup zove *triadni skup* (T), mada bi ispravnije bilo zvati ga *diadno-triadni skup (DT)*, jer u imenioci imamo *diade*, a u brojiocu *trijade*.

3.2.2 RANDOM KANTOROV DIADNO-TRIADNI SKUP

Ovo je bio *uniformni* diadno-triadni Kantorov skup jer su intervali bili isti,1/3, u svakom koraku. Za fraktalnu mehaniku pored uniformnog Kantorovog diadno-trijadnog skupa veoma važan je i *random Kantorov diadno triadni skup*, DT_R, kod koga intervali nisu isti u istom koraku, niti se nejednakost intervala zakonito ponavlja u sledećim koracima. Dužina intervala je različita i slučajna (Fig: 3.7). U dovoljnom broju koraka DT_R pokazuje statističku samosličnost tako da na kraju dva nejednaka segmnta sa verovatnoćom 1 vrše samopreslikavanja, a sam skup ima Hausdorfovu dimenziju. Drugim rečima skup DT_R je fraktal: $dim_H T_R$=s, pri čemu je s vrednost koja zadovoljava uslov da odnosi *levih* i *desnih* intervala (I_1 i I_2) u svim koracima E_n su random varijable C_1 i C_2 , koji skup DT_R vode u stanje fraktala sa veraovatnoćom 1, što se može zapisati u obliku (Falconer, 1990):

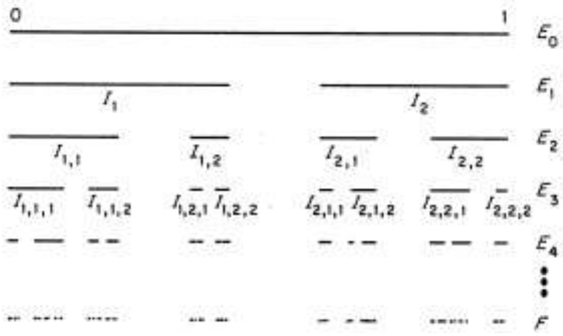


Fig.3.7: Random Kantorov trijadni skup (T_R) kod koga za odnos dva intervala u I_1 (i_1.....i_k) postoji ista staistička raspodela kao što postoji statistička sličnost kod odnosa intervala u I_2 (i_2.......i_k) ((Falconer, 1990)

$$E(C_1^s + C_2^s)) = 1 \qquad 3.23$$

3.2.1 FRAKTALNA DIMENZIJA DIADNO-TRIADNOG KATOROVOG SKUPA

Dimenzija je, generalno posmatrano, jedan intuitivni pojam koji se formira u našem *mentalnom svetu* na bazi percepcije *fizičkog sveta.* Mi imao mentalnu predstavu trodimenzionalnosti našeg fizičkog sveta, ali kao što znamo (Tabela 3.2, izraz 3.15) mi smo prirodni kodogeni entitet kod koga je na bazi redukcije izvršen „informacijoni zapis o kvantnim stanjima prostor-vremena", pa fizički svet vidimo za dve dimenzije manje nego što jeste. Mi *fizički svet* vidimo kao 3D, jer je naš um -2_5 (petodimenzionalan). Zato što su Univerzum (*fizički svet*) i naš *mentalni svet* istih dimenzija, Ajnštajnova izjava „najneshvatljivija stvar je da je Univerzum shvatljiv" postaje sve razumljivija.

Kada je u pitanju *fizički svet* mi smo naučili na celobrojne vrednosti dimenzija 1,2,3,4,....Međutim, postavlja se pitanje da li jedan sistem zatvorenih tačaka ili izlomljenih linija dat na listu papira (2D kvazi-prostoru) ima neku dimenziju manju od 2D, s obzirom da je sastavljen od tačaka (0D kvazi-objekata) i/ili linija (1D kvazi-objekata). Popunjenost (prekrivenost) bilo kog prostora sa objektima manjeg dimenzionalnog reda, dovodi do toga da objekt ima manju dimenziju od prostora u kome se nalazi.

Ako posmatramo *duž* 01 (Fig.3.9) kao 1D objekt (pisaćemo zbog jednostavnosti 1D objekt, ali ćemo imati u vidu da je duž nacrtana na hartiji papira ustvari *kvazi* 1D objekat) i želimo da je prekrijemo malim *s*-dimenzionalnim sferama prečnika R . Za to nam je potrebno S sfera, a ukuan broj sfera potrebnih za potpuno prekrivanje zavisi od dimenzija objekta koji želimo da prekrijemo. Ukoliko je R manje to je potreban veći broj sfera S. Ako broj sfera S(R) raste po zakonu $1/R^D$ kako se R smanjuje, onda se *Hauzdorfova dimenzija* (D_H) objekta računa kao

$$D_H = -\lim_{R\to 0} \frac{\ln S(R)}{\ln R} \quad . \qquad 3.24$$

Fig.3.8: Felix Hausdorff (1868-1242) je pokzao da postoje necelobrojne dimenzije (fraktalne)

Na osnovu izraza 3.24 pokušajmo da odredimo Hauzdorfovu dimenziju za Kantorov diadno-triadni skup (Fig.3.8 *desno*). U prvom koraku, početnu duž moguće je prekriti sa jednom dvodimenzionalnom sferom (krugom) prečnika 1, dok je za prekrivanje objekta nastalog posle prvog koraka potrebno 2 sfere svaka prečnika R=1/3. U trećem koraku potrebne su 4 sfere (kruga) svaka prečnika R=1/9 = $(1/3)^2$.

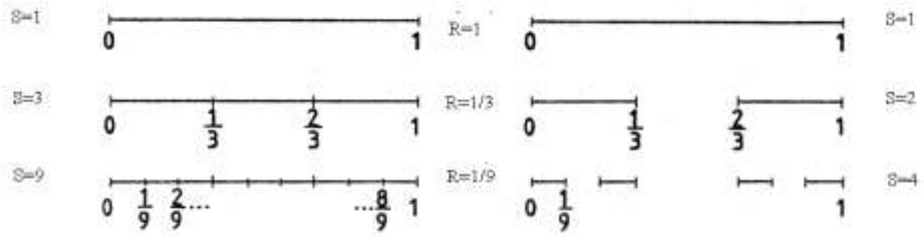


Fig.3.9: Postupak određivanja Hausdorfove dimenzije na jediničnoj duži (*levo*), i postupak dobijanja Kantorovog diadno-triadnog skupa (*desno*) sa elementima koji služe za definisanje vrednosti njegove Hausdorfove dimenzije.

Posle n koraka dobija se S=2^n sfera (odsečaka) prečnika (dužine) R= $(1/3)^n$. Posle beskonačno mnogo (ali prebrojivo) obavljenih postupaka dobije se Kantorov triadni skup. Kako je po Hausdorfovoj proceduri potrebno utvrditi na koji način se menja broj sfera S(R) potrebnih za prekrivanje odsečaka u funkciji njihovog prečnika R, to se zatim traži limes date vrednosti kada R teži nuli. Pri svakom koraku n dobija se S=2^n sfera (duži), a vrednost prečnika se smanjuje po zakonu R= $(2^0/3^1)^n$, pa je na osnovu izraza 3.24 Hausdorfova dimenzija Katrorovog diadno-triadnog skupa, sa tačnošću od osam decimala, jednaka:

$$D_H = -\lim_{R\to 0}\frac{\ln S(R)}{\ln R} = -\lim_{R\to 0}\frac{\ln 2^n}{\ln\left(\frac{2^0}{3^1}\right)^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.630929754. \qquad 3.25$$

Dakle, vrednost 0.630929754 je Hausdorfova dimenzija *DT* skupa i manja je od 1, što govori o odnosu „zastupljenosti“ tačaka (objekata 0D) i linija (objekata 1D) u datom skupu. Kako je Kantorov DT skup „tačkast“ po svojoj prirodi, zove se i Katorova „prašina“ („Cantor's dust“, Mandelbrot, 1977), to vidimo da „zrnca prašine“ skupa nisu *monade* (samo-izolovani objekti) već entiteti koji ostvaruju uređenost, u kojoj postoji međusobni odnos i neka vrsta „povezanosti“. Kantorovu „prašinu“ niko nije do sada vizuelno predstavio osim u formi tačaka na pravoj liniji (Fig.3.7, pod F), i to iz prostog razloga što od „prašine“ možete stvarati raznolike likove po želji. Medjutim, postoji jedno suštinsko ograničenje kod konstrukcije lika: međuodnos svih elementa koji čine sistem mora biti 0.6309.

Fig. 3.10: Konstrukcija Kohove „pahuljice“

Hausdorfova dimenzija (obično je neka necelobrojna vrednost) ne mora biti između 0 i 1, kao što je to slučaj kod kantorovog DT skupa, već može biti između 1 i 2, ako su elementi sa kojima gradimo objekt *duži* , odnosno između 2 i 3 ako su elementi kojima gradimo objekt površine. Uzmimo duž kao osnovu za konstrukciju trougla (Fig.3.9), pa će u svakom koraku broj stranica trougla povećavati se za $S=4^n$, dok dužina svake stranice opada kao $R=(1/3)^n$. Na osnovu izraza 3.24 Hausdorfova dimenzija objekta sa slike 3.10 je D_H = ln4/ln3 = 1.261859507 (tačnost devet decimla). Ovo je poznata Kohova kriva („pahuljica“) i ona veoma ilustrativno pokazuje invarijantnost oblika na promenu skale, što je jedna od osobina fraktala.

3.2.2 DEFINICIJA FRAKTALA

Centralni događaj važan za definisanje fraktala bila je pedesetogodišnja kriza u matematematici (1875-1925), jer se nije mogla na zadovoljavajući način objasniti iregularnost, odnosno fragmentacija, na bazi dimenzija definisanih preko broja koordinata. Ovaj problem prvi je uočio Kantor 1877. godine kada je u formi pisma izneo svoj stav Dedekindu (Richard Dedekend, 1831-1916: nemački matematičar koji je dao važan doprinos u apstraktnoj algebri i teoriji brojeva). Problem je tinjao sve do 1919. godine, sve do mometa dok Hausdorf nije predložio frakcionu (tj. fraktalnu) dimenziju, nasuprot celobrojnoj.

Po definiciji *fraktal* je skup za koji je Hausdorfova dimenzija D_H veća od topološke dimenzije D_T (Mandelbrot, 1977). Očigledan primer je Kantorov *DT* skup kod koga je D_T =0 (tačke su elementi od kojih gradimo objekat), a D_H = 0.6309. Kod Kohove „pahuljice" D_H =1.2618, D_T=1 (jer je element sa kojim gradimo objekat duž). U oba slučaja $D_H > D_T$ pa oba objekta imaju fraktalnu dimenziju. Fraktalna dimenzija može imati i celobrojnu vrednost, kao što je to slučaj sa Braunovim kretanjem kod koga je Hauzdorfova dimenzija D_H=2, a topološka D_T=1. Zato što je $D_H > D_T$ Braunovo kretanje je fraktal.

Novi polet za fraktalne dimenzije i fraktale, kao geometrijske objekte, došao je 1961 godine kada je Ričardson (Lewis Fry Ricardson) radio na problemu računanja aproksimativne dužine nekog objekta na osnovu izabrane skalne dužine ε (Fig.3.11: primer određivanja dužine obala Velike Britanije, Australije i dr,). Ričardsonov rad sa Fig.3.11 pronađen je u njegovoj arhivi tek posle njegove smrti, ali je sticaj okolnosti („or fate" kako to kaže sam Mandelbrot) hteo da taj rukopis dođe u ruke Mandelbrota. Proučavajući rukopis svi su se složili da postoje dve konstante, koje su obeležili sa λ i D, takve da je dužina *L* merena skalnom dužinom ε data izrazom

$$L(\varepsilon) \sim F\,\varepsilon^{1-D}, \qquad 3.26$$

pri čemu je *F* aproksimativna mera. Madelbrot je uprkos činjenici da D nije celobrojna vrednost predložio da vrednost D bude fraktalna dimnzija („Indeed, I recognized that all the above listed methods of measuring L(ε) correspond to nonstandard generralized definitions of dimension alredy used in pure mathematics" - Madelbrot, 1961).

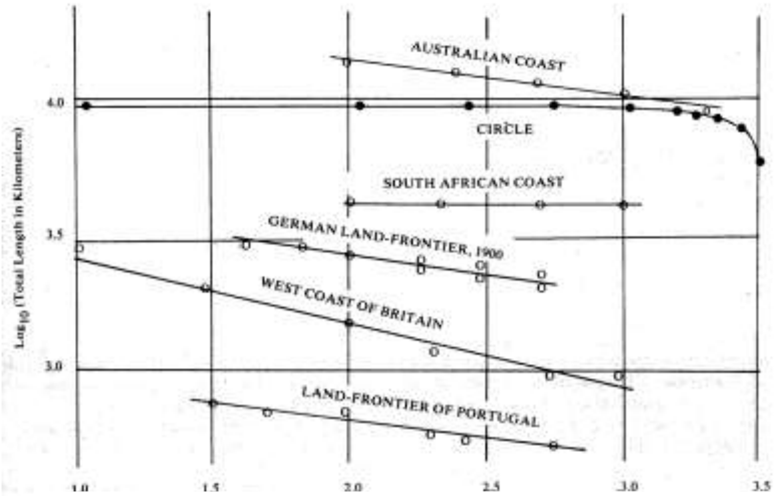


Fig.3.11: Ričerdsonov dijagram odnosa dužine merene veličine (strane) i ukupne izmere dužine obale (Madelbrot, 1961)

3.2.3 DEFINICIJA HAUSDORFOVE DIMENZIJE

Hausdorfova dimenzija se definiše preko mere skupa, tako da se odredi *s*-dimenzionalna *Hauzdorfova mera* ($H^s(F)$ koja je određena veličnom skupa δ (prečnikom sfere) kojom se prekriva bilo koji podskup *F* iz *n*-dimenzionalnog Euklidovog prostora ($\mathbf{R}^n$), čiji je prečnik U definisan kao supremum dve najudaljenije tačke u njemu: $|R| = \sup\{|x-y| : x, y \in R\}$. Uz pretpostavku da je s pozitivan broj, tada za svako δ>0 važi relacija

$$H_\delta^s(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |R_i|^s : \{R_i\}\ je\ \delta - prekrivač\ od\ F\right\}. \qquad 3.27$$

Kako u svakoj iteraciji δ (prečnik sfere ili veličina skupa kojim se objekt prekriva) opada to se klasa dopustivih prekrivača od F redukuje uz istovremenost rasta *infimuma* od $H_\delta^s(F)$, tako da kada $\delta \to 0$ imamo

$$H^s(F) = \lim_{\delta \to 0} H_\delta^s(F) \quad . \quad 3.28$$

Kako δ→ 0 tada pri određenoj vrednosti $H^s(F)$, koja teži ∞ , postoji vrednost s pri kojoj dolazi do „kolapsa" $H^s(F)$ na nulu, pa vrednost s pri kojoj se to dešava nazivamo Hausdaorfovom dimenzijom (Fig.3.12).

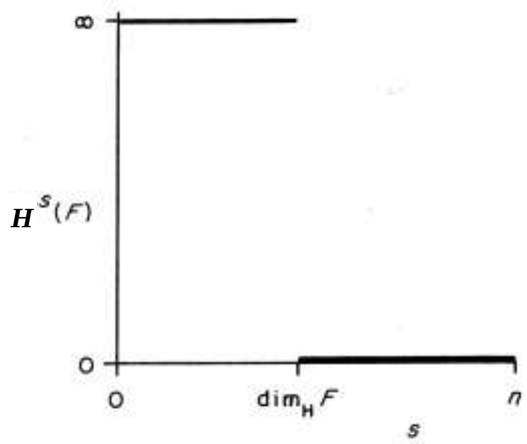


Fig 3.12: Pri datoj vrednosti *s* Hausdorfova mera $H^s(F)$ kolapsira od vrednosti koja je težila ∞ na nulu. Vrednost s pri kojoj se to dešava naziva se Hauzdorfiva dimenzija.

Saglasno definisanoj matematičkoj terminologji razmotimo ponovo određivanje Hausdorfove dimenzije za Kantorov *DT* skup. Kanorov skup F deli se na levi deo $F_L = F \cup [0,1/3]$ i desni deo $F_R = F \cap [2/3,1]$. Levi i desni delovi su samo-slični, a svaki od njih je sličan sa F, s tim što su skalirani sa $2^0/3^1$. Kako je $F = F_L \cup F_D$ to za bilo koje s možemo pisati

$$H^s(F) = H^s(F_L) + H^s(F_R) = (\frac{2^0}{3^1})^s H^s(F) + (\frac{2^0}{3^1})^s H^s(F) \ , \quad 3.29$$

Što nije ništa drugo o skaliraje Hauzdorfove mere saglasno 3.23, 3.37 i 3.28. Sledeći korak je određivanje kritične vrednosti $s = dim_H F$. Ali, jedino što znamo je da je $H^s(F)$ između 0 i ∞. Međutim, mi možemo izraz 3.29 da podelimo sa $H^s(F)$ tako da dobijamo

$$1 = 2\left(\frac{2^0}{3^1}\right)^s ,$$

pa je s=ln2/ln3 = 0.6309, što je isti rezultat što smo ga ranije dobili (izraz 3.25).

LITERATURA

Dauben, W.J., **Georg Cantor: His Mathematics and Phylosophy of the Infinite**, Princeton University Press, Princeton, 1990.

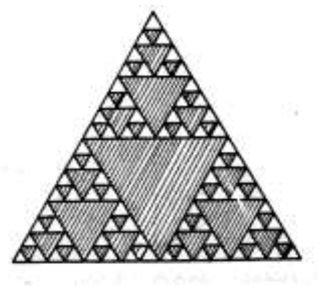
Kurepa,Đ., **Teorija skupova,** Školska knjiga, Zagreb,1951.
Mandelbrot, B., The factal geometry of nature, W.H. Freeman and Company, New York, 1977.
Falconer,K., **Fractal geometry,** John Wiley and Sons, Chichester, 1990

Pitanja:

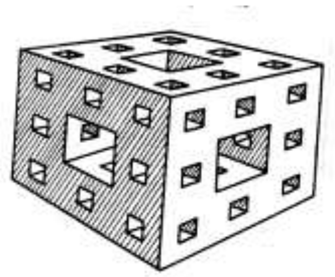
1. Koja dimenzija je veća za objekt: topološka ili fraktalna?
2. Mada je frakciona dimenzija bila poznata još od 1919. god, kada su i zašto fraktali postali interesantni? Ko je promenio ime od frakciona dimenzija na fraktalna?
3. Objasni šta znači mera skupa?

Zadaci:

1. Izračunaj Hausdorfovu fraktalnu dimenziju (H_D) za objekat dat na slici



2. Izračunaj Hausdorfovu fraktalnu dimenziju (H_D) za objekat na slici.



3. Šta uočavaš kod vrednosti objekata sa ove dve slike?