## 4. 1 DETERMINISTIČKI HAOS

### 4.1.1 UVOD

Kada čujemo ili pročitamo pojam *deterministički haos*, odmah kod nas stvara nedoumicu, jer se radi o pojmovima koje opisuju dva različita fenomena *deteminizam* (latinski *deminare*), bez mogućnosti ostvarivanja slobodnih dejstva, i *haos* (grčki χαοοζ) iregularnost (u odnosu na nešto pretvodno što je bilo regularno), nered gde su sloboda dejstva i proizvoljnost ne samo dopuštena, nego i poželja. Medjutim, kao što je govorio Nils Bor suprotnosti se prožimaju (*contraria sunt complementa*) i daju novo superponirano stanje, koje daje kvalitetnije informacije o procesu ili sistemu. Treba imati u vidu da se haos suštinski razlikuje od slučajnih procesa, jer se generiše iz determinističkih uslova kretanja (početnih uslova i jednačina kretanja). Tri osnovne karakteristike determinističkog haosa su *nelinearnost*, *disiptivnost* i *ostljivost na početne uslove*. Da bi se ilustrovao značaj početnih uslova obično se navodi „efekt leptira", koji je 1993. godine u razmatranje fenomena determinističog haosa uveo meteorolog Edvard Lorenc, a sastoji se u sledećem: ako su stvoreni planetarni dinamički atmosferski uslovi za formiranje determinističkog haosa na globalnom nivou (ili pak u nekom regionu) onda je dovoljno da negde na nekom cvetu zaleprša leptir pa da efekt lepršanja krilima posle izvesnog vremena na nekom drugom mestu izazove oluju!? Ovaj ilustrativni primer govori da ukoliko se u evoluciji vremena ovakvih sistema pođe o dve bliske tačke, odnosno trajektorije u faznom prostoru, onda će se one posle dovoljno dugog vremena naći proizvoljno daleko jedna od druge. Dakle, postoji neki regulacioni mehanizam u dinamici ovih sistema koji dovodi do eksponencijalnog razdvajanja bliskih tačaka i ponovnog njihovog vraćanja u određeni deo faznog prostora.

„Dakle, Haos bi na samom početku, a zatim Zemlja širokih prsi-dom večit i siguran svima., takođe mračni Tartar na dnu širokostazne zemlje, a i najlepši bog među besmrtnim bozima - Eros, od koga nam udovi klonu, jer bozima svima i ljudima on nadjača srce u grudima i razumnu volju."

*Hesiod, oko 750.g.p.n.e*

正 → 是

Kinski ideogram *zheng* (levo) prestvalja nešto što je prvo, skaldano, regularno, dok ideogram *shi* (desno) predstavlja modifikaciju prethodnog, i znači glagol *biti* u novo nestabilnom sistemu („haosu")

Postoje dosta dobro elaborirani eksperimenti kao potvrda teorije determinističkog haosa u oblasti električnih kola, nelinearnih oscilatora, strujanja fluida, hemijskih i biohemijskih reakcija, fazno konjugovanih lasera, Džosensonovog spoja i dr.. Postoji klasa bioloških procesa, kao što su dinamika deobe ćelija, dinamika centriola, koji se mogu dobro opisati pomoću determinističkog haosa.

Poznavanje dejstva zavisi od poznavanja uzroka i sadrži ga u sebi.

*Spinoza*

Procesi koji generišu nelinearnu dinamiku i ponašaju se haotično razlikuju se od regularnih ili slučajnih procesa po dimenziji koju ima njihov atraktor (generator dinamike privlačenja trajektorija u faznom prostoru sa tokom definisanim na sebi), koji je zbog neobičnih osobina nazvan *čudni atraktor*. Prikaz osnovnih elemenata ekspirmentalne provere dinamičkih sistema (Fig.5.1) pokazuje da se polazi od sistema sa mnogo stepeni slobode, zatim se vrši redukcija *faznog prostora* na nekoliko bitnih dinamičkih promenljivih, kao i redukcija *parametarskog prostora* na jedan ili dva kontrolna parametra. Najosnovniji prirodni mehanizam redukcije promenljivih je disipacija (lat. *disipatio*-rasipanje, pretvaranje nečega u nešto, što se više ne može ponovo iskoristiti), koja ujedno smanjuje dimenziju atraktora. Tako redukovani sistem se zatim modelira nekim od poznatih metoda i svodi na formu koja omogućava preslikavanje (teži se da to bude jednodimenzionalno) pomoću diferencijalnih jednačina prvog reda ili Lagranž-Ojlerovim jednačinama drugog reda. Na dobijene modele se primenjuju metode (određivanje dimenzije, spektar snage, Poenkarovi preseci i dr.) kojima se ispituje dinamika sistema. Ovakav pristup je nazvan Fajgenbaumov prelaz u haos kod mnogo fizičkih sistema vrlo različite prirode kao što su Rejli-Benarovo strujanje fluida, u elektrotehnici kod RLC-električnih kola, hemijskih reakcija, optici i dr.

**Fig.4.1**.Mitchell Feigenbaum (1944 - ....), profeor Rokfelerovog Univerziteta u SAD

Na Fig. 4.2 dat je primer strujanja fluida koji su ispitivali Rejli – Benar, a sastoji se od posude sa tečnošću (oni su radili sa helijumom i živom) kojoj se dovodi toplota odozdo sve dok se ne uspostavi strujanje. Usled strujanja tečnosti a u zavisnosti od osobina atrijala, formiraće se tok strujanja (u ovom slučaju u obliku cilindra) kao najniža eksitacija. U ovom slučaju vremenski signal je temperatura u određenoj tački, koja je kod stacionarnog strujanja konstantna. Sa povećanjem Rejnolsovog broja dolazi do pojave prve nestabilnosti: strujnice fluida počinju da se menjaju u prostoru (osciluju), a sa njihovim oscilovanjem počinje da se menja i temperatura. U sistemu vreme-temperatura umesto konstantne vrednosti počinje da se javlja prvi „talasi”, sa manje-više izraženim pikovima (amplitudama) i vremenskim trajanjem (periodama). To se može nazvati prvom fazom nestabilnosti. Ukoliko je sledeća linija u spektru subharmonik prve na $f_1/2$, onda je reč o udvajanju periode, ali ako je druga nestabilnost na frekvenciji $f_2$ nesamerljiva sa $f_1$ i od nje nezavisna, onda je reč o

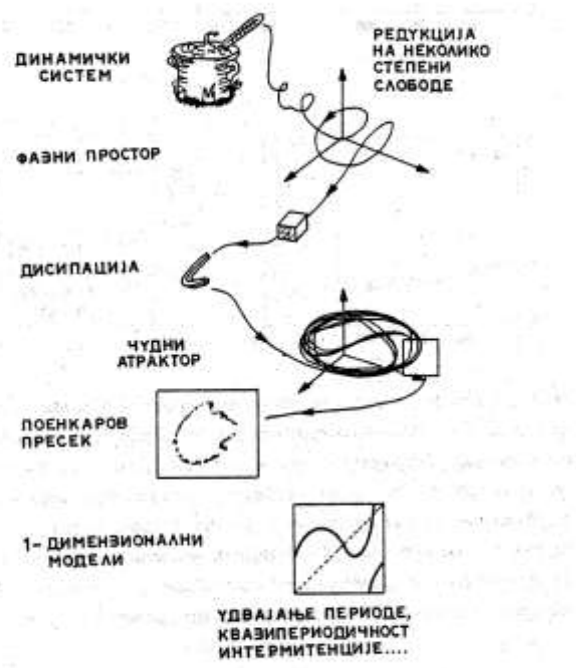



**Fig.4.2**: Postupak analize dinamičkog sistema sa aspkta determinističkog haosa

kvaziperiodičnom kretanju na nekom „objektu" (obično na torusu). U dosadašnjim istraživanjima se pokazalo da se može razlučiti samo nekoliko generacija subharmonika, jer su viši („finiji") harmonici uronjeni (prekriveni) šumom. Međutim, i ako šum briše finu strukturu spektralnih linija (spektar snage nekog dinamičkog sistema) i prekriva finu periodičnost, prelaz u haos je jasan, jer je mesto prelaska parametra preslikavanja (od negativne na pozitivnu vrednost) u logističkom preslikavanju jasan. Može nastati i treći slučaj, intermitencija, kada za istu vrednost kontrolnog parametra nastaju naizmenične periodično-haotične faze u dinamici sistema. Prelazak jednog sistema u haos, na osnovu do sada istraženih fenomena, može biti: udvajanje perioda (viljuškaste bifurkacije), intermitencije (tangentne bifurkacije) i torus (Hopfove bifurkacije).

### 4.1.1 Haos: diferencijani dinamički sistemi i preslikavanja

Za deterministički haos važni su oni dinamički sistemi koji su dugovremeni ili stacionarni (ustaljeni), što ne znači da su oni vremenski nezavisni, jer se radi o asimtotskom ponašanju u vremenu. Sa ovog aspekta i haotično kretanje je takođe oblik ustaljenog ponašanja. Pored diferencijalnih jednačina tipa

$$\frac{dx}{dt} = F_{\mu}(x(t)), \qquad 4.1$$

gde je $x$ vektor iz faznog protora $R^m$, $m \geq 1$, a μ parametar ili skup parametara koji karakterišu dati sistem, a koje možemo kontrolisati, mogu se uzeti i preslikavanja tipa

$$x_{n+1} = f_{\mu}(x_n), \qquad 4.2$$

sa istim značenjem parametara. U oba slučaja interesuju nas samo dinamički sistemi kod kojih su funkcije nelinearne funkcije svog argumetna. Jedino nelinearni dinamički sistemi mogu generisati deterministički haos.

Uopšteno dato, rešenje jednačine 4.1 sa početnim uslvom $x_0$ , $x(t) = \phi(x_0)$, generiše trajektoriju ili orbitu ponašanja datog sistema. Skup trajektorija iz domena $R^m$ defniše „strujnice" $\phi_t$ (Fig.4.3) koje nisu ništa drugo nego vremenski propagator koji ima sledeće osobine: $\phi_0=1$, $\phi_t\,\phi_s= \phi_{t+s}$, $\phi_t^{-1}=\phi_{-t}$. Kada skup svih početnih uslova

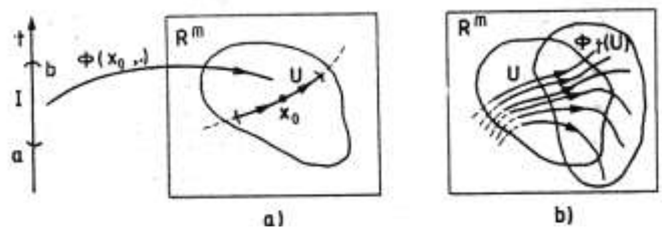


**Fig.4.3** Partiklarno rešenje jednačine 4.1 i tok „strujnica"

definiše neki fazni zapreminu, tada jednačine vremenske evolucije zadaju kretanje te zapremine u faznom prostoru. Ukoliko se tokom kretanja fazna zapremina kontrahuje, odnosno divergencija $F_\mu$ negativna, tada je sistem disipativan, a ako ostaje konstantna, reč je o konzervativnom sistemu.

Kada je sistem disipativan tada fazna zapremina teži nuli, pod uslovom da t→ ∞, pa dolazi do zgušnjavanja trajektrija, tako da dolazi do privlačenja ka nekom geometrijskom objektu, koga nazivamo *atraktorom*. On može biti veoma jednostavan, fiksna tačka (Fig.4.4), a može biti i veoma složena geometrijska figura. Treba imati u vidu da stabilni atraktori disipativnih sistema ne moraju da budu samo ravnotežne tačke, ili tačke uopšte. Tako naprimer kod istog sistema, kada postoji i kada ne postoji spoljna pobuda (Fig.4.4) imamo dva rešenja atraktora: fiksnu tačku i potkovicu. Do ove promene dolazi, jer i ako se ukupna fazna zapremina smanjuje, ona ne mora da se smanjuje u svim pravcima. Ako se kontahuje u dva pravca, a u trećem se ne menja, onda je jasno da će atraktor biti sličan duži.

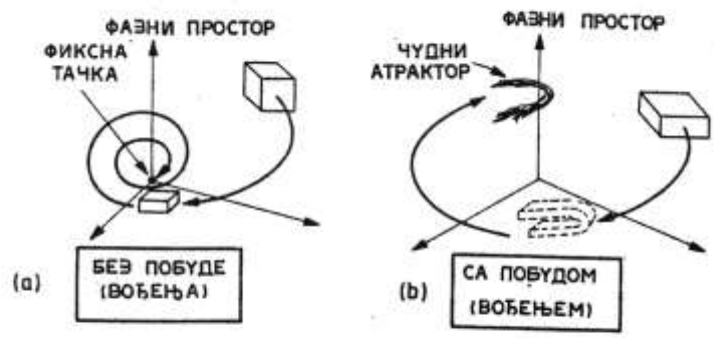



**Fig.4.4:** Disipativni atraktori (fiksna tačka) bez spoljne pobude (a) i atraktor (potkovica) sa spoljnom pobudom (b)

Najjednostavniji geometrijski objekat koji je kompaktan, ograničen i lokalno liči na duž je krug (naziva se graničnim krugom. Kada se u faznom prostoru javlja granični krug to znači da se radi o dinamici sistema sa jednostavnim periodičnim cikličnim kretanjem.

Aleksandar Mihajlovič Ljapunov (1857-1918)

Za dinamičke sisteme veoma važna karakteristika je *stabilnost*, kojom se opisuje stalnost neke karakteristike ponašanja sistema. Tačnu i strogu definiciju pojma stabilnosti ravnotežnog stanja dinamičkog sistema dao je Ljapunov, a ona glasi: Ako se za bilo koju zadatu oblast dopuštenih odstupanja od stanja ravnoteže (oblast $\varepsilon$ ) može naći takva oblast $\delta$ (koje obuhvata stanje ravnoteže), da trajektorija bilo kog kretanja započetog u oblasti $\delta$ nikada ne dostiže granice oblasti $\varepsilon$. Međutim, položaj ravnoteže sistema nije uvek stabilan, jer na sistem deluju unutrašnja i spoljašnja dejstva. Ravnotežna tačka (fiksna tačka) je stabilna ukoliko privlači sve trajektorije u nekoj oblasti faznog prostora (domena atrakcije). Ona tada liči na „ponor" strujnica (slično kao u mehanici fluida), odnosno „izvor" strujnica ako je nestabilna. Kada zbog promenjenih uslova dejstva na sistem „ponor” lokalno postaje „izvor” onda se oko „izvora” formira garanični krug, koji predstavlaja kompromis ili superponirano stanje dejstva „ponora” i „izvora” (Fig. 4.5). Sada možemo preciznije reći šta je atraktor: to je skup tačaka na kojima se nagomilavaju trajektorije $\phi_t(x)$ kada $t \rightarrow \infty$, za svako $x$ iz domena atrakcije, tako da postoji makar jedna orbita koja je svuda gusta.

Za ravnotežnu tačku važi relacija $\phi_t$(P)=P za svako $t$, i one se računaju iz nula funkcije 4.1, odnosno u nepokretnim tačkama preslikavanja iz jednačine 4.2.. uslov stabilnosti nepokretnih tačaka dobija se iz izvoda funkcije $F$ . Prostorni izvod $D_pF= \partial F_i/\partial x_j$ u taki P je kvadratna matrica $m \times m$, pa je ravotežna tačka stabilna ukoliko sve svojstvene vrednosti matrice leže unutar jediničnog kruga u kompleksnoj ravni. Međutim dešava se da dinamički sistem osciluje na dvema međusobno nezavisnim frekvencijama $f_1$ i $f_2$, pa se njegovo kvaziperiodično kretanje može opisati pomoću torusa (fig.4.6). Ako se u spektru sistema nađe $k$ međusobno nezavisnih frekvencija, onda se kaže da sistem izvodi kvaziperiodično kretanje na $k$ – dimenzionalnom torusu ($T^k$).

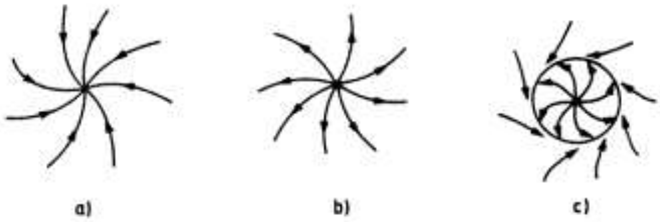



**Fig.4.5**. „Ponor“ kao stabilna ravnotežna tačka (a), „Izvor“ kao nestabilna ravnotežna tačka (b), i granični krug kao suerponirano dejstvo „ponora“ i „izvora“.

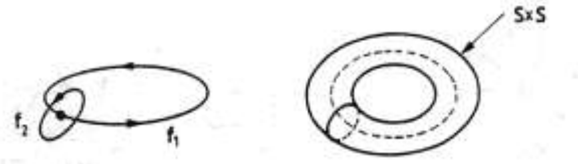



**Fig. 4.6:** Dinamika sistema sa dve nezavisne frekvencije $f_1$ i $f_2$ opisuje se kao kvazi periodično kretanje na torusu

Treba imati u vidu da haotično kretanje nije periodično i nije ravnotežno, pa takvom kretanju odgovaraju posebni atraktori koji imaju „čudne” osobine, sa kojma se nismo do sada sretali u dinamici sistema. Zbog uočene neobičnosti nazvani su *čudni atraktori* . Oni su invarijantni na dejstvo toka u kome se pojavljuju, tj. $\Phi_t$ (U)= U, zapremina atraktora u faznom prostoru je nula, njihova geometrijska dimenzija je necelobrojna, fraktalna, a lokalna struktura samoslična. Ako u dinamici sistema utvrdimo da postoji čudni atraktor onda je sistem haotičan i najmanje jedan Ljapunovljev eksponent postaje negativan. Ovo znači da najmanje u jednom pravcu na čudnom atraktoru dolazi do ekponencijalnog razdvajanja bliskih tačaka i osetljivosti na početne uslove. Kontrakcija čudnog atraktora dovodi do gubitka početne informacije o sistemu, a Kolmogorovljeva entropija postaje pozitivna i jednaka sumi pozitivnih Ljapunovljevih eksponenata ($\lambda$-eksponenata).

#### 4.1.1.1 Ljapunovljevi eksponenti

Uzmimo izraz 4.2 i izvršimo jednodimenzionalno prslikavanje i potražimo u opštem obliku Ljapunovljev eksponent koji meri razdvajanje dveju bliskih početnih tačaka tokom iteracija. Ukoliko se početno rastojanje $\varepsilon$ među tačkama menja po zakonu $\varepsilon e^{N\lambda}$, gde je $N$ broj primenjenih iteracija, onada je Ljapunovljev eksponent po definiciji

$$\lambda(x_0) = \lim_{N\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{N}\ln\left|\frac{f^N(x_0+\varepsilon)-f^N(x_0)}{\varepsilon}\right| = \lim_{N\to\infty}\ln\left|\frac{df^N(x_0)}{dx}\right|, \quad 4.3$$

što je ilustrativno pokazanao na Fig. 4.7:

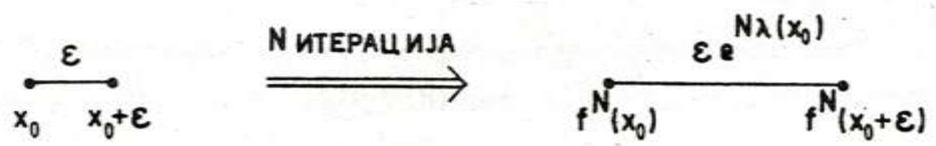



**Fig.4.7:** Shematski prikaz interacija kojima se definiše Ljapunovljev eksponent

Ljapunovljevih eksponenata ima onoliko koliko ima dimenzija u faznom prostoru i oni sačinjavaju Ljapunovljev spektar dinamičkog sistema, koji je isti u svim tačkama atraktora kao i u svim tačkama iz domena atrakcije. Spektar se može menjati samo sa promenom kontrolnog parametra $\mu$.

Ukoliko je $\lambda > 0$ onda je razdvajanje eksponencijalno, postoji velika osetljivost na početne uslove, a u ponašanju sistema pojaviće se haos. Korišćenjem uzastopnih iteracija izraz za $\lambda$ može se napisati u obliku

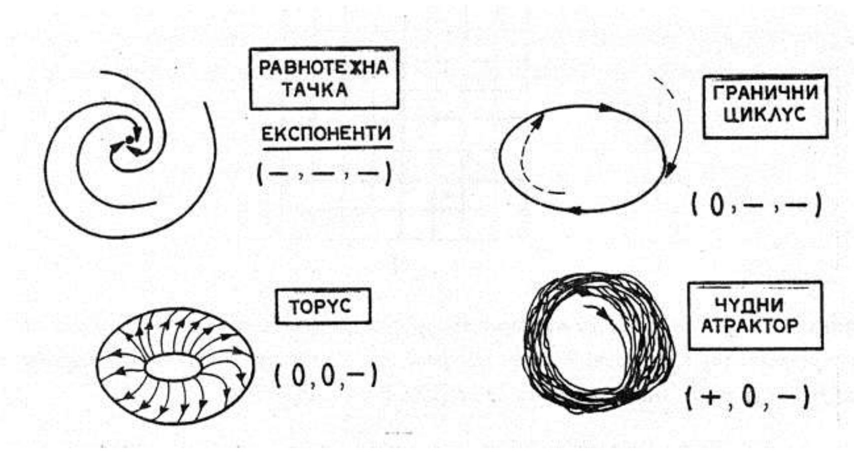
$$\lambda(x_0) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}\ln\left|f'(x_i)\right|., \quad 4.4$$

a ako je višedimenzionalan slučaj tada je potrebno proceduru sprovesti za svaki od nezavisnih, odnosno ortogonalnih pravaca

Ljapunovljevi eksponenti pogodni su za klasifikaciju stacionarnih ponašanja i atraktora. Za granični krug $\lambda_1 = 0$, dok su ostali $\lambda_i < 0$, za torus $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ i ostali su $\lambda_i < 0$. U slučajevima čudnih atraktora mora najmanje jedan eksponent biti veći od nule. Kod jednodimenzionalnih dinamičkih sistema koji se opisuju izrazom 4.1 čudni atraktori se ne mogu pojavti zbog ukupne kontrakcije, a kod dvodimenzionalnih zato što se ne mogu pomiriti uslovi nepkidnosti trajektorija i njihovo eksponencijalno odbijanje, neophodno za pojavu haosa. Tek u trodimenzionalnim i višim faznim prostorima mogu se pojaviti čudni atraktori, s tim što maora biti zadovoljen uslov

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0 \qquad 4.5$$

pa za različitu kombinaciju $\lambda_i$ možemo imati različite čudne atraktore. Ako je $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 < 0$, to se onda zapisuje kao (+,0, -) pa na Fig.4.8 imamo različite kombinacije. U slučaju da postoje dva pozitivna Ljapunovljeva eksponenta tada se proces zove *hiperhaos*.




**Fi.g.4.8:** Ljapunovljevi ekspnenti kod raznih vrsta atraktora u trodimenzionalnom faznom prostoru

Međutim, kod jednodimenzionalnih preslikavnaja datim izrazom 4.2, kao i kod viših dimenzija mogu se pojaviti čudni atraktori.

#### 4.1.1.2 Informacioni kapacitet

Ako Šenonov izraz za izračunavanje klasične informacije

$$I = -\sum_i p_i \log_2 p_i \qquad 4.6$$

povežemo sa Ljapunovljevim eksponentima kod jednostavnijeg jednodimenzionalnog preslikavanja tipa $f(x_n)= ax_n$, tako da želimo da saznamo prosečan gubitak informacije koji se dešava tokom jedne iteracije. U tom cilju podelimo interval dozvoljenih $x$ vrednosti na $N$ delova i pretpostavimo da se početna tačka $x_0$ može naći u svakom od njih sa jednakom verovatnoćom $1/N$. Saznajući u kom se od tih delova tačka $x_0$ nalazi dobja se informacija

$$\Delta I = -\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} \ln\left| f\,'(x_i)\right|. \qquad 4.7$$

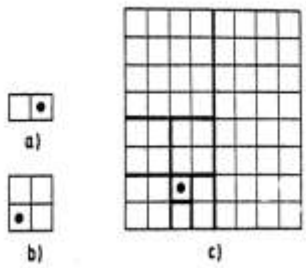



**Fig.4.9:** Informaconi kapaciteti jednostavnih sitema (2,4 i 64 pregrade)

što nije ništa drugo nego do Ljapunovljev eksponent, ΔI=λ, pa je Ljapunovljev eksponent mera gubitka informacije o sistemutokom iteracija. Ovo je direktna veza sa entropijom sistema koj je razradio Kolmogorev.

Andrej Kolmogorov
1903-1987

#### 4.1.1.3 Kolmogorova entropija

Kolmogorova (K-entropija) daje podatak (meru) koliko je haotičan , odnosno neuređen sistem. Na onovu Šenonovove interpretacije neuređenost je usko povezana sa količinom informacije koju imamo o sistemu na nekom nivou rezolucije. Neka $I(\varepsilon,T)$ predstavlja količinu informacije dobijenu praćenjem trajektorije u intervalu vremena $T$ sa preciznošću $\varepsilon$. Ako se izvrši podela faznog prostora na ćelije zapremine $\varepsilon^m$ (Fig. 4.10) koje se prate u intervalima osmatranja $n\tau$, tako da je $t = N\tau = T$, tada se Kolmogorova entropija

$$K \equiv \lim_{T\to 0}\lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{NT}\sum_{n=0}^{N-1}(K_{n+1}-K_n). \qquad 4.8$$

javlja kao granična verdnost informacionog sadržaja. Drugim precizno određivanje trajektorije u faznom prostoru, pa se može shvatiti i kao brzina gubljenja neke početne informacije o položaju sistema u faznom prostoru.

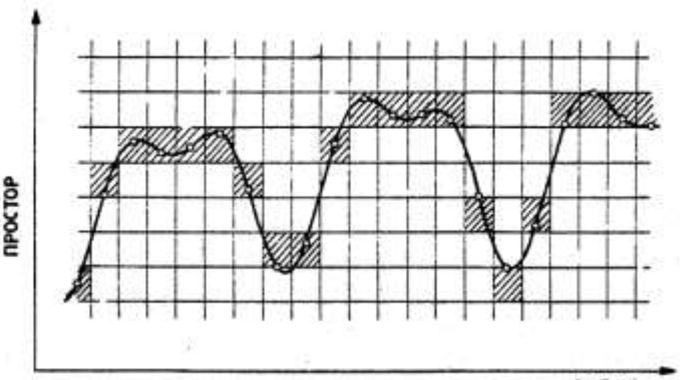



**Fig. 4.10:** Podela kontinualne krive prostor-vremena na ćelije osmatranja ∞

Dobra je pogodnost ta što se na osnovu K-entropije mogu razlikovati haotična kretanje od regularnog ili slučajnog (Fig.4.11). Kod jednodimenzionalnih haotičnih sistema (preslikavanja) K-enropija jednaka je Ljapunovljevom eksponentu. Medjutim, u više dimenzija, ukoliko je više od jednog Л-eksponenta pozitivno onda je $K$ jednako sumi pozitivnih eksponenata, $K = \Sigma\lambda_i^+$.

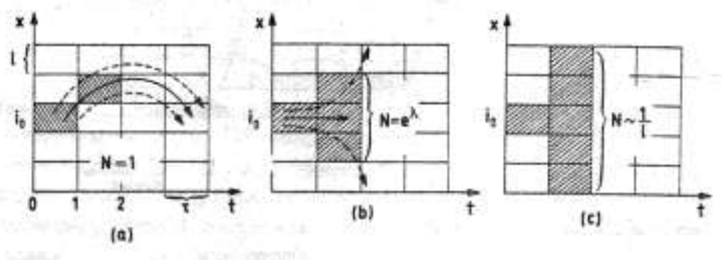



**Fig.4.11:** Kolmogorova entropija za različita kretanja: (a) regularno kretanje K=0, (b) haotično kretanje, K=λ, (c) slučajno kretanje K ≈ ∞.

**LITERATURA**

1. Schroder, M., Fractals, Chaos, Power Laws, W.H. Freeman and Company, New York,1991
2. Basar,E., Chaos in Brain Functon, Springer-Verlag, Berlin,1990.
3. Ott,E., Strange attractors and chaotic motions of dynamical systems, Rev. Mod. Physics, 53, 655-672, 1981.