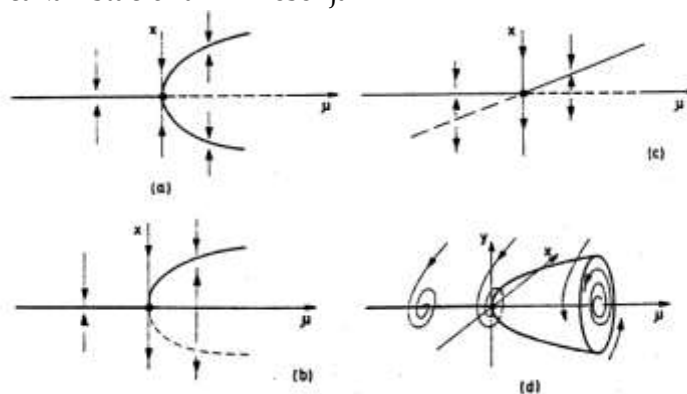


### 4.2.2 Bifurkacija dinamičkih sistema

Ključno u karakterizaciji determinističkog haosa je utvrđivanje momenata promene kontrolnog parametra kada fiksne tačke počinju da se dele na *stabilne* i *nestabilne*. Drugim rečima potrebno je utvrditi kako dinamički sistemi mogu da pređu sa jednog tipa atraktora na drugi. Ovakvi prelazi u dinamici sistema nazivaju se *bifurkacijama*. Izraz bifurkacija u nauci prvi je upotrebio Poenkare da bi opisao granjanje stacionarnih rešenja kod diferencijalnih jednačina tipa 4.1. Bifurkacije nastaju kao topološke promene na atraktorima dinamičkih sistema u toku male promene vrednosti (kolebanja) kontrolnog parametra  $\mu$  (jednačine 4.1 i 4.2). Vrednost kontrolnog parametra pri kome nastaje bifurkacija obeležava se sa  $\mu_B$ , a bifurkaciona tačka sa  $(x, \mu_B)$ . Bifurkacioni diagram predstavlja grafik svih ravnotežnih tačaka u zavisnosti od kontrolnog parametra  $\mu$ . Na osnovu izraza 4.1 i 4.2 mogu nastati *globalne* ili *lokalne* bifurkacije, a u okviru lokalnih može nastati više vrsta, a nas će najviše interesovati one bifurkacije koje nastaju u blizini bifurkacionih tačaka i stacionarnih rešenja jednačina 4.1 i 4.2. Ovakve bifurkacije nazivaju se kodimenzije 1, jer se dešavaju u jednodimenzionalnom parametarskom prostoru ( $\mu$ ), a fiksna tačka se nalazi u ( $x = 0, \mu = 0$ ). Mogu nastati četiri opšta slučaja: viljuškaste, tangentne, transkritične i Hopfove bifurkacije (Fig. 4.12). Da bi se ustanovilo kojem tipu bifurkacija pripada sistem potrebno je izvršiti analizu tačke bifurkacije, koja obuhvata:

1. određivanje ravnotežnih, odnosno stacionarnih tačaka;
2. određivanje linearizovanog rešenja u okolini ravnotežnih tačaka, i
3. Određivanj stabilnosti ravnotežnih tačaka.

U prvom slučaju (Fig.4.12), a na osnovu izraza 4.1 , data je viljuškasta bifurkacija u obliku



**Fig.4.12:** Osnovna četiri tipa lokalnih bifurkacija kodimenzije 1: (a) viljuškasta, (b) tangentna, (c)transkritična, i (4) Hopfova bifurkacija

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3, \quad 4.9$$

pa na osnovu  $\mu x - x^3 = 0$  dobijamo da ravnotežna tačka ima tri rešenja  $x_1^r = 0, x_2^r = \sqrt{\mu}, x_3^r = -\sqrt{\mu}$ , a jednačina kretanja u okolini ravnotežne tačke  $x = x^r + \varepsilon$ , je

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon} = \varepsilon(\mu - \varepsilon^2),$$

pa je  $\dot{\varepsilon} = \mu\varepsilon$  za  $x^r = 0$  i  $\dot{\varepsilon} = -2\varepsilon$  za  $x^r = \pm\sqrt{\mu}$ . Za  $\mu < 0$  postoji samo jedna ravnotežna tačka  $x^r = 0$ , a pri  $\mu > 0$  postoje tri od kojih je  $x^r = 0$  nestabilna i dve stabilne  $x^r = \pm\sqrt{\mu}$ .

Kod slučaja 4.12b, dat je primer tangentne (ili sedlaste) bifurkacije koja se javlja kod sistema datim jednačinom 4.1 u obliku

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2, \quad 4.9$$

pa za  $\mu - x^2 = 0$  dobijamo da su ravnotežne tačke ( $x^r$ ) određene kao  $x^r = \pm\sqrt{\mu}$ , što daje da za  $\mu < 0$  nema ravnotežnih tačaka, dok za  $\mu > 0$  postoje dve. U okolini ravnotežne tačke  $x = x^r + \varepsilon$ , jednačina kretanja je

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -2x^r \varepsilon \quad 4.10$$

sa rešenjem  $\varepsilon = \varepsilon(0)\exp(-2x^r t)$ , što daje da je za  $-\sqrt{\mu}$  je nestabilna fiksna tačka, a za  $\sqrt{\mu}$  stabilna.

Kod slučaja 4.12c data je transkritična bifurkacija koja se dobija iz izraza

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2 \quad 4.11$$

a ravnotežne tačke se nalze u  $x^r = 0$  i  $x^r = \mu$ . Jednačina kretanja je linearna i ima oblik  $\dot{\varepsilon} = \mu\varepsilon$ , za  $x^r = 0$  i  $\dot{\varepsilon} = -\mu\varepsilon$  za  $x^r = \mu$ , pa je za  $\mu < 0$  stabilna ravnotežna tačka  $x^r = 0$ , a nestabilna  $x^r = \mu$  i obrnuto kada je  $\mu > 0$ .

Kod slučaja 4.12d pojavljuje se kompleksna promenljiva koja je za slučaj Hopfove bifurkacije data izrazom

$$\frac{dz}{dt} = z(\mu + b|z|^2) \quad 4.12$$

pri čemu su  $z$  i  $b$  kompleksni brojevi, a  $\mu$  je opšti kontrolni parametar, a  $\alpha$  je prvi Ljapunovljev eksponent u svojevrednosti bifurkacije  $b = \alpha + i\beta$ , tj.  $\alpha = \lambda$ .

Ako je  $\alpha < 0$  (negativno) tada postoji stabilan granični krug za  $\mu > 0$ , pa je

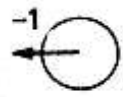
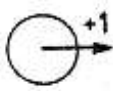

$$z(t) = re^{i\omega t}, \quad 4.13$$

gde je  $r = \sqrt{-\mu/\alpha}$ , a  $\omega = \beta r^2$  (fazor), ali ako je  $\alpha > 0$  (pozitivan) tada je granični krug nestabilan.

Prikazane bifurkacije nazivaju se *normlnim* (ili direktnim) u odnosu na *inverzne* koje se dobijaju kada u sva četiri primera nelinearni član promeni znak. Važan element kod bifurkacija je *scenario* (definisana prostorno-vremenska struktura koja se pod određenim uslovima kao dinamički proces realizuje u prostoru i vremenu) prelaska u kaos. Poznata je veza između viljuškastih bifurkacija i Fajgenbaunovog scenarija koja dovodi sistem u stanje haosa, jer se ponavljanjem viljuškastih bifurkacija sa povećanjem kontrolnog parametra udvostručava broj fiksnih tačaka posle svake bifurkacije, što za  $\mu_\infty$  dostiže aperiodično kretanje (haos).

Sa aspekta determinističkog haosa od ostale tri bifurkacije može se izostaviti transkrična, jer nema topološke promene u izgledu atraktora, odnosno dolazi samo do zamene stabilnih i nestabilnih fiksnih tačaka. Nema drastičnih promena kod atraktora, kao što je pojava novih stabilnih ravnotežnih tačaka ili „sudar“ stabilnih i nestabilnih tačaka.

Tabela 4.1: Svojtstavenih vrednoti bifurkacija za različite i scenarije

| <i>Bifurkacija</i> | <i>Scenario</i> | <i>Karakteristika</i>                               | <i>Svojstvena vrednost</i>  |
|--------------------|-----------------|---|---|
| Viljuškasta        | Fajgenbaunov    | - udvajanje periode<br>- intermitencija             |  |
| Tngentna           | Pomo-Manevilov  | - otvaranje periodičnog prozora<br>- intermitencija |  |
| Hopfova            | Ruel-Takensov   | -kvaziperiodičnost<br>- intermitencija              |  |

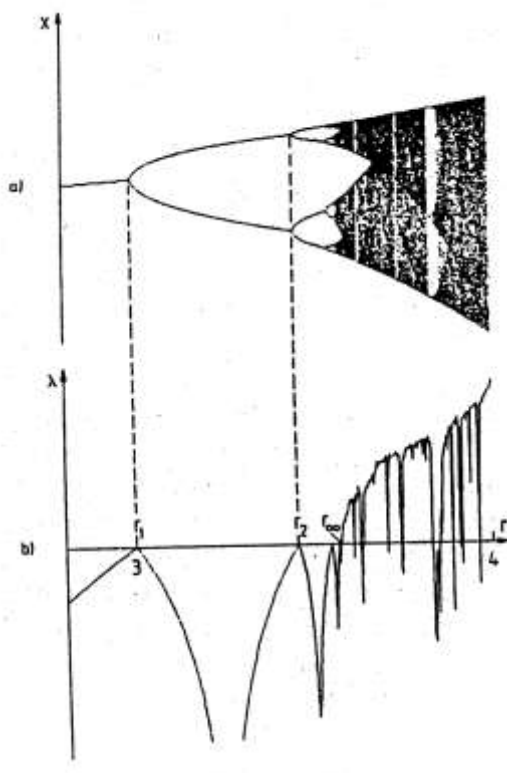
Scenario prelaska tangentne bifurkacije u haos data je *svojtvenom vrednosti* bifurkacije  $b=+1$  (poznata kao Pomo-Manevilov scenario) , viljuškaste  $b=-1$  (Fajgenbaunov scenario), a Hopfove  $b = \alpha \pm i\beta$  (Ruel-Takensov scenario).

### 4.2.3 Iterativna preslikavanja

Preslikavanja se odvijaju po opštem zakonu (izraz 4.2), pa ako imamo sistem koji ima uslove za rast (kristal, embrio, kamatna stopa i dr.) tada je primećeno još u IXX veku, da se rast odvija po geometrijskoj progresiji, pod pretpostavkom da nema ogrničenja rastu. Ako izraz 4.2 napisemo u obliku

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \quad 4.14$$

onda je model poznat u literaturi kao *logističko preslikavanje*. Funkcije logističkog preslikavanja mogu biti razne, ali mi ćemo uzeti za primer bifurkacioni dijagram logističkog preslikavanja (Fig.4.13). Bifurkacioni dijagram, za različite vrednosti kontrolnog parametra  $\mu$ , pokazuje dugoročno ponašanje iteranta  $x_n$ , kada  $n \rightarrow \infty$ .



**Fig. 4.13:** Bifurkacioni dijagram logističkog preslikavanja(a), i odgovarajući Ljapunovljev eksponent za za dato preslikavanje (b)

Ukoliko sistem izvodi jednostavno periodično kretanje onda se na dijagramu vide samo dve tačke i može se lako vizualizovati. Parametarska osa se izdela i formira bifurkacioni dijagram (Fig.4.13b) sa pripadajućim Ljapunovljevim eksponentom. Uočavaju se tri intervala na parametarskoj osi sa različitim globalnim dinamičkim ponašanjem iteranta. Za  $r_1 \leq 3$  imamo stabilno ponašanje sistema sa jednom fiksnom tačkom (za  $r < 1$  fiksna tačka je  $x=0$ ). Za  $3 < r < r_\infty \approx 3.5699456\dots$  sistem izvodi periodično kretanje sa sukcesivnim udvajanjem periode. Ljapunovljev eksponent je u ovoj oblasti negativan, osim u tačkama  $r_1, r_2 \dots$  gde je 0, a za  $r_\infty \approx 3.5699456\dots$  i više je uglavnom pozitivan (za neke vrednosti je negativan ili nula).

Unutar haotičnog intervala na mnogo mesta otvaraju se periodična mesta, „prozori“, u kojima je  $\lambda < 0$ .

Kod navedenih bifurkacija rastojanja između tačaka bifurkacije  $\Delta_n = r_{n+1} - r_n$  na parametarskoj osi, tj. od granjanja  $2^n$  do  $2^{n+1}$ , imaju konstantan odnos

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} = \delta, \quad 4.15$$

za dovoljno veliko  $n$ . Isto tako rastojanja tačaka u  $2^n$  - periodičnom superciklusu (ciklus koji sadrži kritičnu tačku preslikavanja) od kritične prave  $x = 1/2$  unutar kaskade bifurkacija ima konstantan odnos rastojanja

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} = \alpha \quad 4.16$$

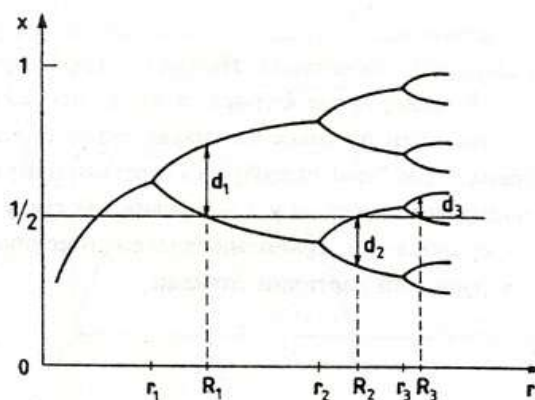
za dovoljno veliko  $n$ . Vrednosti  $\alpha$  i  $\delta$  su univerzalne Fajgenbaumove konstante i za sva preslikavanja sa kvadratnim, odnosno paraboličnim maksimumom imaju vrednost

$$\alpha = -2.50290\dots$$

$$\delta = 4.66920\dots$$

Vrednosti parametra  $r_n$  u kojima se pojavljuju bifurkacije i vrednosti  $R_n$  u kojima nastaju superciklusi uređene su uzlaznim nizom i imaju istu tačku nagomilavanja

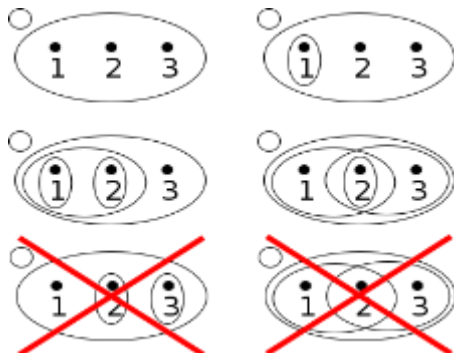
$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = r_\infty = 3.50290\dots$$



**Fig. 4.14:** Rastojanja fiksnih tačaka ( $d_n$ ) najbližih kritičnoj vrednosti od kritične prave  $x=1/2$ . Tačke preseka sa kritičnom pravom određuju na parametarskoj osi  $r$  superstabilne  $2^n$ -cikluse

Bifurkacije generalno označavaju nagle kvantitativne i/li kvalitativne *topološke* promene u dinamici sistema, odnosno izgledu atraktora. One se dešavaju pri polasku kontrolnog parametra kroz određene kritične bifurkacione vrednosti.

Topološke promene dešavaju se u topološkom prostoru koji je matematički definisan sa tri osnovne osobine: *konvergencijom*, *povezanosti* i *neprekidnosti*. Matematička oblast koja se bavi ovim osobinama objekata naziva se *topologija*.



**Fig. 4.15:** Šest primera prostora definisanih kao skup od tri elementa {1,2,3} od kojih četiri zadovoljavaju uslove topoloških prostora, a dva nezadovoljavaju: Prostor *dole-levo* nije topološki zato što unija {2,3} od {2} i {3} ne postoji, a kod prostora *dole-desno* ne postoji presek {2} od {1,2} i {2,3}

Kod topoloških prostora:

1. unija konačno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup
2. presek proizvoljnog mnoštva zatvorenih skupova je zatvoren skup
3. unija proizvoljnog mnoštva otvorenih skupova je otvoren skup
4. presek konačno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup.

#### **LITERATURA:**

1. Adnadević, D., Topologija, Naučna knjiga, Beograd, 1980
2. Schroder, M., Fractals, Chaos, Power Laws, W.H. Freeman and Company, New York, 1991
3. Ott, E., Strange attractors and chaotic motions of dynamical systems, Rev. Mod. Physics, 53, 655-672, 1981.