

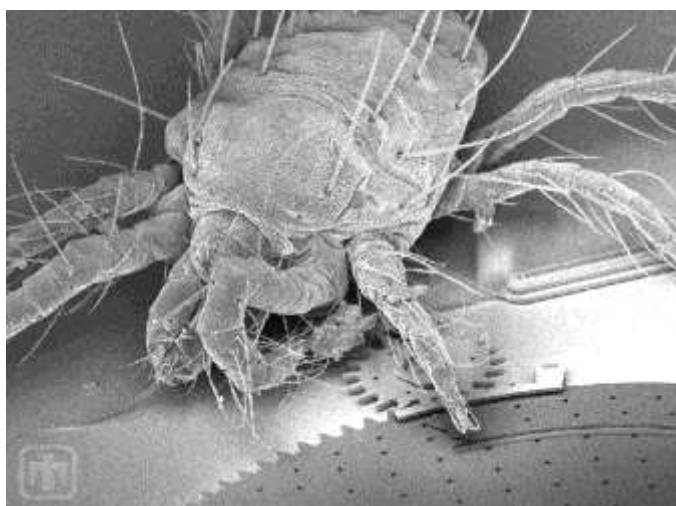
## 1. UVOD U MIKRO-NANO FLUIDIKU

Способност израде оруђа потребних за свакодневни живот издвојила је људску врсту од свих осталих врста на Земљи још у раним стадијумима еволуције. У почетку су димензије тих оруђа биле реда величине човека, који је у складу са степеном развоја и могућностима ширио опсег. Тежио је с једне стране изградњи што већих објеката. На пример, Кеопсова пирамида изграђена око 2600. године пре нове ере, висока је 147 метара, док је данас највиша зграда висока око 800 метара. Насупрот томе, проналазак часовника у 13. веку, микроскопа у 17. и транзистора половином 20. века, били су значајни догађаји за продор у производњу све мањих делова и уређаја.

Визионар на путу минијатуризацији био је нобеловац Ричард Фејман. Пре више од пола века на годишњем скупу Америчког друштва физичара одржао је предавање под називом: „There's plenty room at the bottom“. Тада је на интересантан начин наговестио развој нових области физике неопходних за производњу микроуређаја и њихово управљање. Понудио је и две награде од по хиљаду долара за оног ко:

1. садржај једне странице испише на  $25000^2$  пута мањој површини;
2. направи електромотор, који ће бити мањи од шездесетчетвртог дела кубног инча, којим ће моћи да се управља споља.

Није морао дуго да чека. У наредним деценијама развијена је технологија производње микроуређаја названих микро-електромеханички-системи, скраћено МЕМС. То су уређаји карактеристичне дужине мање од 1mm а веће од  $1\mu\text{m}$ . На слици 1.1 дато је поређење величина једног микромотора и биљног крпеља (дужина му је мања од 1 mm).



**Слика 1.1** Микромотор и биљни крпељ [SNL, 2010]

MEMC-и су сачињени од механичких елемената, сензора и (или) актуатора и електронике који се налазе на заједничкој полупроводљивој подлози (нпр. од силицијума). Производе се технологијом интегрисаних кола. Сићушни сензори, као и они макроскопских димензија, су уређаји који преводе неелектричне улазне величине у електрични излазни сигнал, за разлику од микроактуатора (или актуатора макроскопских димензија) који извршавају обрнут процес. Данас постоје притисни, термички, оптички, звучни, хемијски, биомедицински, инерцијални микросензори, сензори за радијацију итд. Микроактуатори су вентили, пумпе, електрични и оптички релеји и прекидачи, пинцете и клешта, разни мотори итд.

Покретни делови MEMC-а омогућавају управљање окружењем тако што региструју, контролишу и активирају механичке процесе на микронивоу, а истовремено индивидуално или групно генеришу потребне ефекте на макронивоу. Развој технологије за производњу микроуређаја омогућио је да они понаособ извршавају једноставне задатке, док се одговарајућим избором више ових уређаја могу обављати врло сложене операције. На тај начин могу се формирати врло флексибилни системи, чији су сви елементи лако заменљиви и једноставни за руковање.

## **Примена микро-електро-мехничких система**

Интензиван развој технологије омогућио је серијску производњу МЕМС-а, тако да они данас имају врло широку примену. У поређењу са одговарајућим системима макроскопских димензија могу се дефинисати неке од предности МЕМС-а:

- мањи системи се покрећу далеко лакше од већих (много је мања инерцијална сила због мале масе);
- микро-системи су много осетљивији на промену температуре;
- како је резонантна фреквенција система обрнуто пропорционална његовој маси, резонантне фреквенције у микросистемима су врло високе и често су изнад фреквентних опсега већине машина и уређаја;
- због веће прецизности и мале масе ови минијатурни системи су врло погодни за примену у војне сврхе, у медицини (посебно у хириргији), у микроелектроници, у телекомуникацијама, у сателитима и васионским бродовима, као и свуда где се користе микрокомпоненте.

Протекла деценија, на пример, обележена је радом на концепту „паметне прашине“ која представља хипотетичку бежичну мрежу МЕМС-а: сензора, робота и уређаја који скупљају потребне информације из околине, а ситни су попут честица прашине. Они могу детектовати, на пример: светлост, температуру, постојање магнетног поља, вибрације, присуство разних хемијских и биолошких супстанци итд.

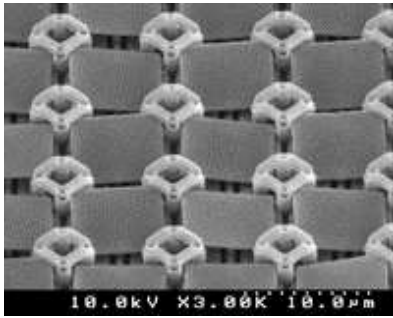
Микроуређаји су све више заступљени и у свакодневном животу. У виду различитих сензора или актуатора налазе се самостално или унутар разних кућних уређаја, утичући значајно на пораст квалитета живота. Саставни су делови, на пример: ронилачких сатова и компјутера, фитнес справа, спортске обуће, разних мерача притиска (рецимо у гумама), дечијих играчака, машина за прање, усисивача и све већег броја „паметних“ кућних уређаја

(енгл. *smart home appliances*) . Сматра се да данас постоји 15 до 20 МЕМС-а по глави становника северне Америке.

У нове аутомобиле, на пример, уграђује се све више ових микроуређаја који их чине безбеднијим, енергетски ефикаснијим, комфорнијим и једоставнијим за употребу, а користе се и за дијагностиковање кварова. АБС систем, на пример, користи позиционе сензоре који омогућавају управљање у току кочења. Систем вешања користи сензоре померања, притиска и позиције, као и микровентиле да би на неравном путу ублажио вибрације штетне за возило и за путнике. Систем за детекцију и избегавање опструкција на коловозу (одрона, ударних рупа) садржи сензоре померања и притиска. Навигациони систем такође користи МЕМС-е. Микроакцелерометри, као сензори за детекцију промене убрзања, при судару активирају ваздушне јастуке у возилу. Данас постоји тенденција повећања броја и смањења величине сензора који се уграђују у аутомобиле.

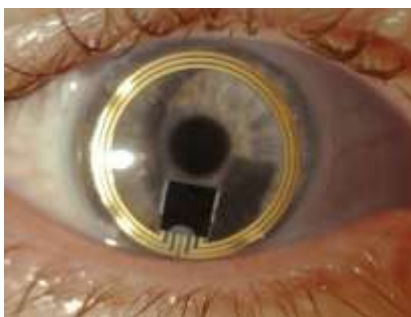
У видео уређаје такође се уграђују МЕМС-и сачињени од великог броја микро-огледала која служе као актуатори за постизање високе дефиниције оптичких екрана. Један овакав уређај садржи улазно-излазни прикључак, актуатор и површ са огледалима. Кад се актуатор стави под напон огледала се покрећу или мирују усмеравајући светлост на одговарајући начин. Свако огледало одговара 1 пикселу. На слици 1.2 дат је један такав дводимензијски МЕМС. То је микроактуатор са огледалима која су квадратног облика, странице 8 $\mu$ m.

Производња МЕМС-а изузетно је подстакла развој медицине, посебно у области дијагностике и хирургије. На пример, на врховима катетера налазе се сићушни сензори притиска. МЕМС-и се уграђују у слушне апарате. У медицинским лабораторијама користе се микросепаратори за раздвајање биолошких ћелија и уређаји за разне врсте анализа. Врхови скенера електронких микроскопа могу да се користе за проучавања појединачних атома. Аутоматизацију у биолошким и хемијским испитивањима омогућавају све распрострањеније такозване лабораторије на чипу итд.



**Слика 1.2** Двострумензијски МЕМС актуатор са огледалима [Ricoh, 2010]

На слици 1.3 приказан је производ који применом технологије МЕМС-а служи за дијагностиковање глаукома [Sensimed, 2010]. Глауком је прогресивна болест која ако се не открије на време и адекватно контролише, неминовно доводи до слепила. То је данас друга на листи болести (иза катаракте) које доводе до слепила. Сматра се да од ње данас болује 68000000 људи на свету. Настаје као последица високог или нестабилног очног притиска који се у току дана може мењати. Производ је контактано сочиво у оку, које садржи антену (три златна прстена), сензор (сребрни прстен на спољашњој ивици ока) и микропроцесор (плочица облика квадрата странице 2 милиметра и дебљине 50 микрона). Метода се састоји у неинвазивном, континуалном (24 сата) мерењу очног притиска, како би се помоћу оваквог сочива које не ремети видно поље пацијента дијагностиковао и третирао глауком. Сензор овог МЕМС-а је кружног облика и служи за мерење деформације. Он мери промене кривине рожњаче и помоћу антене шаље информације на обраду. Примењује се на оку, па је неопходно водити рачуна о допустивом делу спектра електромагнетних таласа које емитује овакав МЕМС, као и о његовом загревању.



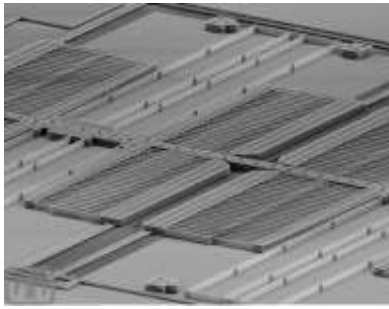
**Слика 1.3** Сочиво са МЕМС

Развој нових технологија потребних за производњу микро-електро-механичких система утицао је на снажан развој многих области науке. Механика флуида је једна од кључних научних дисциплина неопходних у проучавању и конструкцији већине данашњих МЕМС-а и микроуређаја. Она разматра струјања флуида и феномене транспорта који се одвијају у њима. Електростатички, магнетни, пнеуматски и термички микроактуатори, микросензори притиска, температуре, протока, брзине и звука, саставни су део минијатурних уређаја унутар којих се одвија струјање флуида. У такве уређаје спадају микромотори, микролежаји, микропумпе и микротурбине, затим микроплазници (саставни део микросателита) микровентили, микрофилтери итд. На слици 1.4 приказана је микротурбина израђена од никла. Пречник ротора је  $130\mu\text{m}$ , а ширина процепа између ротора и осовине  $5\mu\text{m}$ . Висина турбине је  $150\mu\text{m}$ . Максималан број обртаја је 150000 обртаја у минути, а животни век до 100 милиона обртаја.



**Слика 1.4** Микротурбина

Спрегом сензора са актуаторима могуће је управљати унутрашњим и спољашњим струјањима флуида. Тако је могуће контролисати струјање ваздуха око возила, пловних објеката и летилица. Одлагањем или интензивирањем преласка ламинарног у турбулентни режим струјања контролише се одвајање граничног слоја од контуре летилице. Циљеви оваквог управљања струјањем флуида јесу смањење отпора и аеродинамичког загревања, као и повећање маневарских способности летилице.



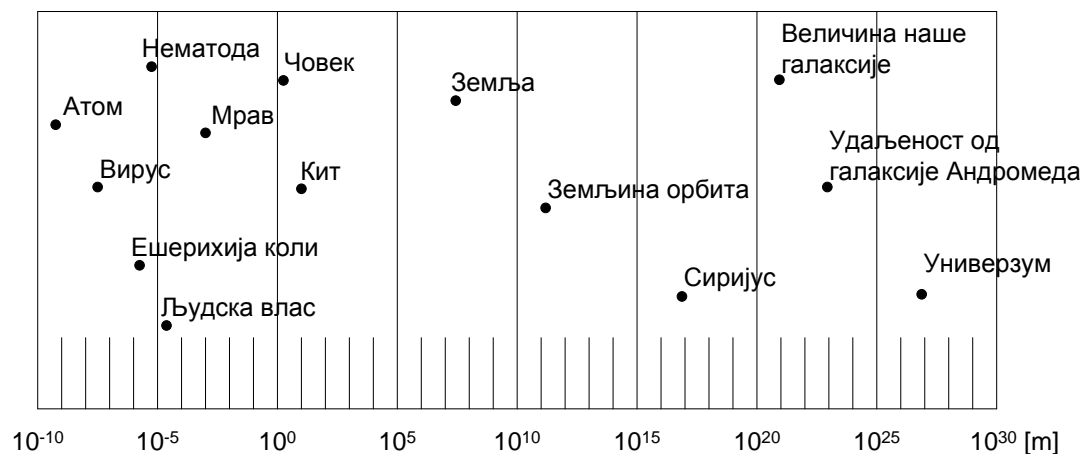
**Слика 1.5** Електростатички микрочешаљ за погон микромотора [SNL, 2010]

Микропумпе се користе у штампачима са мастилом (енгл. *ink-jet*). Микромотор на погон електростатичког микрочешља може служити као пумпа у микрострујањима (на пример при убризгавању лекова) или за хлађење микропроцесора у васионским бродовима. Принцип рада електростатичког микрочешља заснован је на коришћењу Кулонове силе која се јавља између наелектрисаних тела. Зупци чешља су плоче на малом удаљењу једна од друге које се привлаче када су наелектрисане супротним наелектривањем (и одбијају када су наелектрисане истоименим наелектривањем). У правцу нормале на плоче тада се јавља привлачна сила интензитета пропорционалног површини плоча и квадрату напона међу њима, а обрнуто пропорционалног квадрату растојања између плоча, тако да значајно опада са повећањем растојања међу плочама. Када су наелектрисане плоче смакнуте у тангенцијалном правцу осим нормалне јавља се и тангенцијална компонента силе која је сразмерна ширини плоча и квадрату напона међу њима, а обрнуто сразмерна нормалном растојању између плоча. Тако је тангенцијална компонента мање осетљива на промену тог растојања у поређењу са нормалном компонентом силе која се користи код прекидача. Подешавањем броја зубаца и напона међу њима добијају се жељене вредности обе компоненте силе. За погон ових уређаја потребна је само снага пуњења или пражњења плоча (зубаца). Приликом тангенцијалног покретања плоча јавља се Куетово (Couette) струјање гаса између њих. На слици 1.5 дат је микрочешаљ који електростатичку силу користи за погон микромотора.

Струјања изазвана разликом притиска могу да служе за хлађење електронских уређаја, док се струјања кроз микроканале са једним зидом који је нагнут и другим који се креће јављају у гасним клизним микролежајима. Све ове примене намећу потребу за моделирањем струјања флуида у микроканалима различитих геометрија и граничних услова.

### Скалирање микромеханичких система

Механички системи који се разликују по величини имају и различито понашање. На слици 1.6 дата је табела димензија расположивих објеката у природи од атома до Универзума. Изабрана је логаритамска расподела да би на истом дијаграму могле бити дате димензије од најмањих, микро-објеката, преко макро-објеката који су реда величине човека, до највећих, астрономских објеката. Различите силе и ефекти доминирају у системима различитих редова величине. На пример, гравитационе силе доминирају међу планетама и дефинишу њихово кретање, док су оне занемарљиве код макро-објеката за чије је кретање потребно обезбедити друге силе.



**Слика 1.6** Логаритамска скала димензија у природи [Gad-el-Nak, 2002]

Дакле, промена величине система доводи до суштинских разлика. Наиме, величина појединих врста сила мења се на различит начин са променом димензије система. На пример, силе површинског напона су пропорционалне димензији система, површинске силе



квадрату димензије, запреминске кубу, а гравитационе четвртог степену димензије система. Због тога, поређењем макросистема димензије 1m са микросистемом реда 1mm следи да силе површинског напона опадају  $10^3$  пута, површинске силе  $10^6$  пута, запреминске  $10^9$ , а гравитационе чак  $10^{12}$  пута. Оваква анализа унапред указује на чињеницу да се доминација сила смањењем димензије система помера од сила пропорционалних већим ка силама пропорционалним мањим степенима димензије разматраног система. Зато ми не можемо, а мушица може да хода по води. Претходна анализа је врло једноставна, а неопходна као водич у процени које силе доминирају зависно од величине система. У складу са њом пројектују се уређаји и системи потребне величине.

Сходно претходним разматрањима, при изучавању струјања у микроуређајима јавља се много интересантних феномена који не постоје када се струјни домен повећа за неколико редова величине. Тако при струјањима у МЕМС-а доминирају површински ефекти. Однос површине и запремине уређаја чија је карактеристична дужина  $l=1\text{m}$  је  $A/V=1\text{m}^{-1}$ , док је у микроуређајима карактеристичне дужине  $l=1\mu\text{m}$  овај однос  $A/V=10^6\text{m}^{-1}$ . Због тога се значајно мења транспорт масе, количине кретања и енергије кроз површ чији је количник са запремином (или масом) милион пута већи. Пример: у чаши је  $5\text{cm}^3$  воде. Кад је нагнемо, вода се из чаше пролива на подлогу. Ако је у капилари милиметарског пречника  $1\text{mm}^3$  воде, када се нагне капилара вода пада на подлогу и ту остаје у виду капљице. Ако се замисли капилара микронског пречника у којој је  $1\mu\text{m}^3$  воде једноставно је наслутити да ће ова количина воде када се изручи из капиларе испарити пре него што дође до подлоге.

У оквиру овог предмета разматрају се проблеми који припадају унутрашњим микрострујањима гасова. Таква струјања гаса веома су заступљена у микро-електро-механичким системима. Код ових струјања доводи се у питање теорија континуума као и одговарајући гранични услови, према којима се вискозни гас креће брзином зида (услов лепљења) и има температуру зида на

зиду микроканала. Услов лепљења и једнакости температуре гаса и зида на зиду канала указује на постојање термодинамичке равнотеже, што је последица великог броја судара гаса са зидом. Код струјања гаса у микроканалима средња дужина слободног пута молекула није занемарљиво мала у поређењу са карактеристичном димензијом струјног поља (ширина микроканала), тако да се ефекат разређености гаса мора узети у обзир. У том случају, зависно од степена разређења, врши се избор методе решавања проблема. Разређеност гаса може се узети у обзир променом граничних услова. Та чињеница, када је у питању брзинско поље, уместо лепљења на зиду микроканала подразумева претпоставку клизања и термичког пузања, а код температурског поља захтева претпоставку температурског скока на зиду. Ако је степен разређења изнад неке границе, проблеми се могу решити само применом кинетичке теорије.

## **1.1 СТРУЈАЊЕ ФЛУИДА У МИКРО СИСТЕМИМА**

У микро електро механичким системима присутно је струјање флуида. Резултати експеримената који се односе на струјање флуида кроз микроканале указали су на извесна одступања у односу на аналитичка решења добијена коришћењем класичног начина решавања проблема у механици флуида, тј. применом теорије континуума. Да би се прецизно пројектовали микро електро мехнички системи наметнула се потреба за развојем модела којим би се могло тачно описати струјање флуида у микроканалима.

При струјању флуида кроз микроканале дужина слободног пута молекула није занемарљиво мала у односу на димензију канала, па је при прорачуну тих струјања потребно анализирати да ли је могуће користити једначине континуума. Дужина слободног пута молекула је средња вредност растојања коју молекули пређу између два узастопна судара. За идеалне гасове, код којих се сматра да молекули имају облик сфере, дужина

слободног пута молекула зависи од притиска и температуре на следећи начин:

$$\lambda = \frac{\eta}{p} \sqrt{\frac{\pi RT}{2}} \quad (1.1)$$

где је  $R$  гасна константа,  $T$  температура гаса,  $p$  притисак, а  $\eta$  динамичка вискозност флуида. Однос дужине слободног пута молекула  $\lambda$  и карактеристичне димензије  $h$  представља Кнудсенов (Knudsen) број:

$$Kn = \frac{\lambda}{h} \quad (1.2)$$

На основу кинетичке теорије гасова следи веза између вискозности и дужине слободног пута молекула:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{1}{2} \lambda \bar{c}_m \quad (1.3)$$

где је  $\nu$  кинематска вискозност флуида,  $\eta$  динамичка вискозност,  $\rho$  његова густина, а  $\bar{c}_m$  средња брзина молекула која се дефинише у односу на брзину звука  $c$  као:

$$\bar{c}_m = \sqrt{\frac{8}{\pi \kappa}} c \quad (1.4)$$

где  $\kappa = c_p/c_v$  представља однос специфичних топлота.

Рејнолдсов (Reynolds) и Махов (Mach) број су

$$Re = \frac{uh}{\nu} \quad (1.5)$$

$$M = \frac{u}{c} \quad (1.6)$$

где  $u$  представља карактеристичну брзину флуида. Из једначина (1.1)-(1.6) следи релација која даје везу између Рејнолдсовог, Маховог и Кнудсеновог броја:

$$Kn = \sqrt{\frac{\pi \kappa}{2}} \frac{M}{Re} \quad (1.7)$$

Према томе  $Kn$ ,  $M$  и  $Re$  број нису међусобно независни. Уколико су позната два, трећи је тачно дефинисан и следи из једначине (1.7).

Струјање гасова код којих вредност Кнудсеновог броја није занемарљиво мала ( $Kn > 0.001$ ) третира се као струјање разређеног гаса. Ефекат разређености долази до изражаја при малим притисцима (опструјавање летилица на великим висинама или струјање гаса у вакуум-уређајима), али и у микроканалима у којима се струјање гаса одвија при стандардним вредностима притиска. Вредност Кнудсеновог броја одређује степен разређености. У зависности од  $Kn$  броја разликују се четири режима, међу собом различита по приступу у решавању проблема струјања флуида:

1.  $Kn < 0.01$  - теорија континуума,
2.  $0.001 < Kn < 0.1$  - струјање са клизањем,
3.  $0.1 < Kn < 10$  - прелазна област,
4.  $Kn > 10$  - кинетичка теорија гасова.

Коришћењем Болцманове једначине, која представља функцију расподеле брзина молекула у времену и простору, могу се добити решења за све поменуте режиме. Функција расподеле одређује број молекула чије се брзине налазе у одређеном малом опсегу у посматраној запремини у једном тренутку времена. До промене у броју молекула који се крећу брзином  $c_i$  у некој посматраној елементарној запремини долази услед судара молекула унутар те запремине при чему неки од њих престају да се крећу том брзином, а неки је након судара добијају, и услед пролаза молекула кроз површину посматране контролне

запремине. Ако је посматрана елементарна запремина гаса у равнотежи то значи да се број молекула у њој који се крећу у малом опсегу око неке брзине не мења у току времена, тј. да функција расподеле брзина има константну вредност. Тада се функција расподеле одређује помоћу Максвеловог (Maxwell) израза:

$$f_0 = \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{2kT}(c_i - u_i)^2\right] \quad (1.8)$$

где је  $m$  маса молекула,  $T$  температура,  $k$  Болцманова константа,  $c_i$  апсолутна вредност брзине молекула, а  $u_i$  средња локална брзина флуида.

Множењем Болцманове једначине масом, количином кретања или енергијом молекула и интегралњем тих израза у опсегу свих молекуларних брзина, добијају се редом једначине одржања масе, количине кретања и енергије. Ове једначине дају решење и за случај када  $Kn \rightarrow \infty$  тј. када се утицај судара молекула може занемарити, и у случају када  $Kn \rightarrow 0$  тј. када је утицај судара молекула значајан, па струјање веома брзо успоставља равнотежно стање. Међутим, њихова сложеност онемогућава лако добијање решења, па се намеће потреба за коришћењем једноставнијих апроксимативних облика ових једначина кад год је то могуће. Један од начина поједностављења је коришћење развоја у ред Чапман-Енског (Chapman-Enskog) у случају кад стање флуида мало одступа од услова равнотеже ( $Kn < 1$ ). Тада се функција расподеле брзина предпоставља у облику следећег пертурбационог реда:

$$f = f_0 + Kn f_1 + Kn^2 f_2 + \dots \quad (1.9)$$

где је  $f_0$  Максвелов израз за функцију расподеле која одговара равнотежном стању. Заменом овог реда у Болцманову једначину и изједначавањем чланова истог реда добија се систем једначина.

Тако у случају равнотеже, када је решење функција расподеле  $f_0$ , следи да је напон услед вискозности  $\tau_{ij} = 0$ , па се једначина количине кретања своди на Ојлерову (Euler) једначину. Решење функције расподеле брзине првог реда  $f = f_0 + Kn f_1$  је задовољавајуће у случају врло малих одступања од равнотежног стања и тада се једначина количине кретања своди на Навије-Стоксове (Navier-Stokes) једначине. У случају мало већих одступања од равнотеже потребно је наћи решење функције расподеле другог реда које доводи до Барнетове (Burnett) једначине за количину кретања (дате у поглављу 2.1).

Налажењем функције расподеле брзине одређене су и макроскопске величине као што су густина, брзина, температура и напон услед вискозности:

$$\rho = m \int_{-\infty}^{+\infty} (nf) dc \quad (1.10)$$

$$u_i = \int_{-\infty}^{+\infty} c_i f dc \quad (1.11)$$

$$\frac{3}{2} kT = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m c_i c_i f dc \quad (1.12)$$

$$\tau_{ij} = - \left[ \overline{\rho (c_i - u_i)(c_j - u_j)} - p \delta_{ij} \right] \quad (1.13)$$

где је  $n$  концентрација молекула,  $dc = dc_1 dc_2 dc_3$  елементарна запремина поља брзина ( $c_1, c_2, c_3$  су компоненте вектора брзине),  $p = \rho RT$  је притисак, а  $\delta_{ij}$  је Кронекеров оператор ( $i = j \rightarrow \delta_{ij} = 1$ ;  $i \neq j \rightarrow \delta_{ij} = 0$ ).

Уобичајено је да се Навије-Стоксове једначине користе при решавању проблема у оквиру класичне механике вискозног флуида ( $Kn < 0.001$ ), али и у области струјања са клизањем

( $0.001 < Kn < 0.1$ ). У делу прелазне области ( $0.1 < Kn < 1$ ), када је одступање од равнотеже веће, потребно је користити Барнетове једначине. Ове једначине могу бити коришћене и за област струјања са клизањем у циљу постизања веће тачности.

## 1.2 ГРАНИЧНИ УСЛОВИ

Да би систем једначина којим се описује струјање флуида (једначина континуитета, количине кретања и енергије), био решен, потребно га је допунити одговарајућим граничним условима. У класичној механици вискозног флуида сматра се да флуид пријања уз зид, па је брзина флуида на чврстој контури једнака брзини те контуре. Исто важи и за поље температуре, тј. температура флуида на зиду једнака је температури самог зида. Да би била важећа ова два гранична услова, флуид и површина са којом је у контакту морају бити у термодинамичкој равнотежи. То подразумева велику учестаност судара између флуида и чврсте површине. То је задовољено када је Кнудсенов број мањи од 0.01. У случају већих вредности Кнудсеновог броја, учесталост судара није довољно велика, па на зиду долази до ефекта клизања и до температурског скока у флуиду. Гранични услов при таквим условима први је дефинисао Максвел (Maxwell) 1879. године на основу кинетичке теорије једноатомних гасова:

$$u - u_w = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \lambda \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_w + \frac{3}{4} \frac{\eta}{\rho T} \left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_w \quad (1.14)$$

где је  $u$  брзина гаса на зиду,  $u_w$  брзина зида,  $\lambda$  дужина слободниг пута молекула,  $\sigma_v$  коефицијент акомодације,  $\partial/\partial n$  извод у правцу управном на зид,  $\partial/\partial s$  извод у правцу струјања флуида на зиду, а  $\eta, \rho, T$  редом динамичка вискозност, густина и

температура гаса. У случају изотермског струјања нема термичког пузања гаса, тј. други члан ове једначине је нула.

Користећи такође кинетичку теорију гасова, Смолучовски (Smoluchowski) је 1898. године извео гранични услов за температуру, познат као услов температурског скока:

$$T - T_w = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \left( \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \right) \frac{\lambda}{Pr} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_w \quad (1.15)$$

где је  $T$  температура флуид на зиду,  $T_w$  температура зида,  $\sigma_T$  температурски коефицијент акомодације,  $\kappa$  однос специфичних топлота  $c_p/c_v$  и  $Pr = c_p\eta/k$  Прантлов (Prandtl) број, у коме је  $k$  коефицијент провођења топлоте.

Коефицијент акомодације количине кретања у правцу струјања  $\sigma_v$  представља физичку карактеристику која узима у обзир интеракцију између гаса и површине зида. Дефинише се на следећи начин:

$$\sigma_v = \frac{K_{in} - K_{ref}}{K_{in} - K_w} \quad (1.16)$$

где су  $K_{in}$  и  $K_{ref}$  количине кретања молекули пре и после удара у зид у правцу тангенте на зид, а  $K_w$  је количина кретања у правцу тангенте на зид свих одбијених молекула коју су они преузели од зида при судару. Ако се зид не креће тј.  $u_w = 0$  тада је и  $K_w = 0$ . Када нема промене количине кретања молекула гаса у правцу тангенте зида пре и после удара ( $K_{in} = K_{ref}$ ), тада је  $\sigma_v = 0$  (спекуларна рефлексија). То значи да не постоји размена количине кретања између флуида и зида у правцу тангенте зида, што доводи до закључка да нема трења између њих. Случај струјања када је  $\sigma_v = 1$  зове се дифузна рефлексија и тада је средња брзина рефлектованих молекула у правцу тангенте зида једнака нули, тј.  $K_{ref} = 0$ .



Температурски коефицијент акомодације дефинише се на следећи начин:

$$\sigma_T = \frac{e_{in} - e_{ref}}{e_{in} - e_w} \quad (1.17)$$

где је  $e_{in}$  унутрашња енергија молекула пре судара са зидом,  $e_{ref}$  унутрашња енергија молекула после судара са зидом и  $e_w$  унутрашња енергија молекула гаса на температури зида.

Показало се да за  $Kn > 0.1$  постоји одступање између аналитичких резултата добијених на основу граничних услова клизања првог реда и експерименталних резултата. То је подстакло истраживања у циљу дефинисања граничних услова другог реда, али сагласност о начину дефинисања овог граничног услова није постигнута. Примери граничног услова другог реда различитих аутора чијом применом се могу добити решења за део прелазне области, а такође и повећати тачност решења у области струјања са клизањем су:

Дајслер (Deissler, 1964):

$$u - u_w = \pm \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w - \frac{9}{16} \lambda^2 \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_w + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_w + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_w \right) \quad (1.18)$$

Карниадакис-Бескок (Karniadakis и Beskok, 2002):

$$u - u_w = \frac{(2 - \sigma_v)}{\sigma_v} \left( \pm \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w + \frac{\lambda^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_w \right) \quad (1.19)$$

Хсиа и Домото (Hsia и Domoto, 1983):

$$u - u_w = \frac{(2 - \sigma_v)}{\sigma_v} \left( \pm \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w - \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_w \right) \quad (1.20)$$

Локерби (Lockerby и др., 2004):

$$\begin{aligned}
 u - u_w = & \pm \frac{(2 - \sigma_v)}{\sigma_v} \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_w + \frac{3}{4} \frac{\eta}{\rho T} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w \\
 & + \frac{(2 - \sigma_v)}{\sigma_v} \lambda \left( 2 \frac{\eta}{\rho^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} - \frac{\eta}{\rho T} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \right) \Big|_w \\
 & + \frac{3}{16\pi} \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} Pr \lambda^2 \left[ (45\kappa - 61) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (45\kappa - 49) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 12 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \Big|_w \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

Сви ови гранични услови другог реда за струјање између паралелних плоча своде се у општем случају на

$$u - u_w = \pm A_1 \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w - A_2 \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_w \quad (1.22)$$

Где су  $A_1$  и  $A_2$  коефицијенти клизања првог и другог реда. У табели 1.1 приказане су вредности ових коефицијената које произилазе из различитих модела.

Аутор	година	$A_1$	$A_2$
Максвел	1879	1	0
Шамберг	1947	1	$5\pi/12$
Дајслер	1964	1	$9/8$
Хсиа-Домото	1983	1	0.5
Карниадакис-Бескок	2002	1	-0.5
Локерби	2004	1	0.15-0.19

Табела 1.1 Теоријске вредности коефицијената клизања  $A_1$  и  $A_2$  проистекле из различитих модела