## 2. ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Диференцијални облик основних једначина (једначине одржања масе, количине кретања и енергије) при стационарном струјању флуида у индексној нотацији може се написати на следећи начин:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial(x_i)} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho u_i u_j - \sigma_{ij}\right) = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho E u_i - \sigma_{ij} u_j + q_i\right) = 0. \tag{2.3}$$

У општем случају то су нелинеарне парцијалне диференцијалне једначине другог реда. Њима је потребно додати Клапејронову (Clapeyron) једначину стања идеалног гаса[1]:

$$p = \rho R T. \tag{2.4}$$

Компоненте брзине гаса су $u_i\left(u_j\right)$, $x_i\left(x_j\right)$ су координате Декартовог (Descartes) правоуглог координатног система, а $\delta_{ij}$ је Кронекеров (Kronecker) делта симбол. Компоненте тензора напона у Декартовим координатама означене су са $\sigma_{ij}$ и према уопштеној Њутновој хипотези о напонима су:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}. \tag{2.5}$$

Компоненте тензора напона услед вискозности $\tau_{ij}$ су у линеарној вези са компонентама тензора брзине деформисања $\dot{S}_{ij}$, па уз Стоксову хипотезу гласе:

$$\boldsymbol{\tau_{ij}} = 2\eta \dot{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{ij}} - \frac{2}{3}\eta\delta_{\boldsymbol{ij}}\left(\mathrm{div}\boldsymbol{u}\right), \tag{2.6}$$

[1]Под појмом идеалан подразумева се и термички и калорички идеалан гас. Нема хемијских реакција, $c_v$=*const.* и $c_p$=*const.*, а темтература гаса у струјном пољу није већа од 600K.

где је $\eta$ динамичка вискозност. Укупна енергија сведена на јединицу масе гаса $E$ једнака је збиру унутрашње $e$ и кинетичке енергије по јединици масе гаса:

$$E = e + \frac{u_j u_j}{2} . \qquad (2.7)$$

Претпоставља се да се размена топлоте са околином врши само провођењем па су компоненте вектора топлотног флукса $q_i$ дате Фуријеовим законом:

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} , \qquad (2.8)$$

где је $k$ коефицијент провођења топлоте.

Користећи принцип еквипартиције енергије (енергија сваког степена слободе једног молекула износи по $k_\mathrm{b}T/2$), унутрашња енергија по јединици масе гаса чији молекули имају по $s$ степени слободе може се изразити као:

$$e = s \frac{k_\mathrm{b} T}{2m} = \frac{s}{2} RT . \qquad (2.9)$$

Према дефиницији специфичног топлотног капацитета при константној запремини $c_v$ и константном притиску $c_p$ и уз чињеницу да се разматра идеалан гас следи:

$$c_v = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_v = \frac{s}{2} R; \qquad c_p = \left( \frac{\partial e}{\partial T} + \frac{p \partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{s+2}{2} R.$$

(2.10)

Из једначина (2.10) следи Мајерова (Mayer) релација као и однос специфичних топлотних капацитета при константном притиску и запремини, $\kappa$:

$$c_p - c_v = R; \qquad \kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{s+2}{2} . \qquad (2.11)$$

Овде ће се разматрати струјање једноатомског гаса. У том случају број степени слободе молекула гаса је $s$=3 (транслација у 3 правца). Тада из једначина (2.10) и (2.11) следи:

$$c_v = \frac{3}{2}R\,,\; c_p = \frac{5}{2}R \;\text{ и }\; \kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}\,. \qquad (2.12)$$

Како се у тези разматрају неизотермски проблеми, биће дефинисан и Прантлов (Prandtl) број на уобичајен начин:

$$\Pr = \frac{c_p \eta}{k}\,. \qquad (2.13)$$

Динамичка вискозност $\eta$ одређена је релацијом

$$\eta = \frac{5}{16}\frac{\sqrt{\pi \boldsymbol{m} \boldsymbol{k}_{\mathrm{b}} \boldsymbol{T}}}{\pi \boldsymbol{d}^2} = \frac{5}{16}\frac{\boldsymbol{m}\sqrt{\pi \boldsymbol{R}\boldsymbol{T}}}{\pi \boldsymbol{d}^2}\,. \qquad (2.14)$$

И коефицијент провођења $k$ се уз уведене претпоставке о једноатомском гасу може изразити у функцији пречника молекула $d$ и масе молекула $m$, или у функцији коефицијента вискозности $\eta$ као:

$$\boldsymbol{k} = \frac{75}{64}\frac{\boldsymbol{R}\boldsymbol{m}\sqrt{\pi \boldsymbol{R}\boldsymbol{T}}}{\pi \boldsymbol{d}^2} = \frac{15}{4}\boldsymbol{R}\eta\,. \qquad (2.15)$$

Из (2.13) и (2.15) следи да је Прантлов број константан и да код једноатомских гасова према (2.12) износи:

$$\Pr = \frac{2}{3}\,. \qquad (2.16)$$

Систем основних једначина (2.1)-(2.3) са једначином стања (2.4), уз Њутнову хипотезу о напонима (2.5), Стоксову хипотезу (2.6), дефиницију укупне енергије сведене на јединицу масе гаса (2.7), Фуријеов закон (2.8), принцип еквипартиције енергије (2.9), добија се методом Чапман-Енског из одговарајућих момената Болцманове једначине када се за функцију дистрибуције узму прва два члана реда реда $f = f_0 + \mathrm{Kn}\; f_1 + \mathrm{Kn}^2\; f_2 + \ldots$. То је систем од 6 једначина са шест непознатих: три компоненте брзине, притисак, температура и густина гаса за чије затварање је потребно дефинисати одговарајуће граничне услове.

Систем основних једначина (2.1)-(2.3) за стационарно, дводимензијско, стишљиво струјање гаса када се подужна $u_1$ и попречна $u_2$ компонента брзине означе са $u$ и $v$, а координате $x_1$ и

$x_2$ Декартовог правоуглог координатног система са $x$ и $y$ биће дат у развијеном облику. Тако једначина континуитета, пројекције једначине количине кретања на осе $x$ и $y$ и једначина енергије редом гласе:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0\,, \tag{2.17}$$

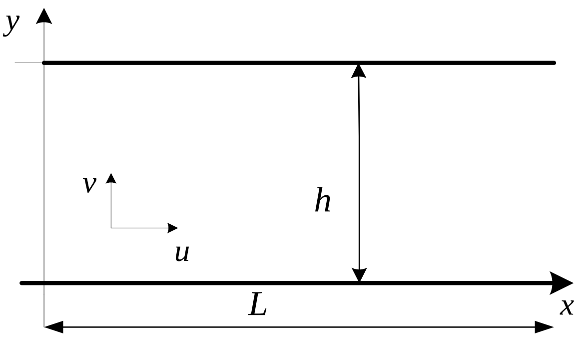
$$\rho\left(\boldsymbol{u}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}+\boldsymbol{v}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)=-\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left[2\eta\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}-\frac{2}{3}\eta\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\left[\eta\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\right] \tag{2.18}$$

$$\rho\left(\boldsymbol{u}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}+\boldsymbol{v}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)=-\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{y}}+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\left[2\eta\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}-\frac{2}{3}\eta\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left[\eta\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\right] \tag{2.19}$$

$$\rho\ \boldsymbol{c_p}\left(\boldsymbol{u}\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{x}}+\boldsymbol{v}\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)=\boldsymbol{u}\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{x}}+\boldsymbol{v}\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{y}}+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{k}\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\left(\boldsymbol{k}\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)$$
$$+\eta\left[2\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^2+2\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^2+\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^2\right]-\frac{2}{3}\eta\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^2. \tag{2.20}$$

## 3. ИЗОТЕРМСКО СТРУЈАЊЕ ГАСА У МИКРОКАНАЛИМА КОНСТАНТНОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА (услед разлике притиска на улазу и излазу)

Анализирано је дводимензијско изотермско стишљиво струјање гаса у микроканалима константног попречног пресека (слика 3.1).



Слика 3.1 Микроканал променљивог попречног пресека.

Оба зида микроканала су непокретна, а струјање гаса се дешава захваљујући разлици притиска на улазу и излазу канала. Анализирана су струјања у режиму клизања. С обзиром да описано струјање има једнодимензијски карактер (једна компонента брзине која зависи од две координате) и да су промене брзине у правцу струјања мање у односу на промене по попречном пресеку, једначине одржања масе у интегралном облику, количине кретања и једначина стања којима се описује ово струјање су:

$$\dot{m} = \int_0^h \rho u \mathrm{d}y \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{3.3}$$

$$p = \rho RT \tag{3.4}$$

Гранични услови клизања првог реда за доњи и горњи зидсу:

$$y = 0: \qquad u = \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\lambda \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=0} \tag{3.5}$$

$$y = h: \qquad u = -\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\lambda \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=h} \tag{3.6}$$

Из јеначине количине кретања (3.2) следи решење за брзину:

$$u = \frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \tag{3.7}$$

Применом граничних услова за брзину (5) и (6) одређују се константе $C_1$ и $C_2$:

$$C_1 = -\frac{1}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}h \tag{3.8}$$

$$C_2 = -\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\lambda\frac{1}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}h \tag{3.9}$$

Сада је решење за брзину

$$u = \frac{h^2}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h} - \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}Kn\right) \tag{3.10}$$

где је $Kn = \frac{\lambda}{h}$ локална вредност Кнудсеновог броја Масени проток се налази увођењем решења за брзину у једначину континуитета (1). При налажењу интеграла треба имати на уму да за изотермско струјање густина и дужина слободног пута молекула тј. локална вредност Кнудсеновог број зависе само од притиска тј. од координате *x*.

$$\dot{m} = -\frac{ph^3}{12RT\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(1 + 6\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}Kn\right) \tag{3.11}$$

Како је дужина слободног пута молекула обрнуто пропорционална са притиском, то је и вредност Кнудсеновог броја такође обрнуто сразмерна са притиском. Тако се локална вредност Кнудсеновог броја може изразити на следећи начин:

$$Kn = Kn_e\frac{p_e}{p} \tag{3.12}$$

где је $Kn_e$ вредност Кнудсеновог броја у излазном пресеку, а $p_e$ притисак у излазном пресеку. Узимајући у обзир ову зависност локалне вредности Кнудсеновог броја од притиска , а тако и од координате *x*, налажењем интеграла једначине (3.11):

$$\int_x^L \dot{m}\mathrm{d}x = \int_x^L \left[ -\frac{ph^3}{12RT\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(1+6\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}Kn\right)\right]\mathrm{d}x \tag{3.13}$$

следи једначина расподеле притиска у овом микроканалу:

$$\dot{m}\left(L-x\right) = -\frac{h^3}{12RT\eta}\left[\frac{1}{2}\left(p_e^2-p^2\right)+6\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}Kn_e p_e\left(p_e-p\right)\right] \tag{3.14}$$

Једначина (3.14) даје решење за расподелу притиска уколико је познат масени проток, а такође ако је позната вредност притиска на улазу ($x$=0, $p = p_i$) и на излазу може се одредити масени проток.

**Здатак:**

Ако је:

$Kn_e = 0.1,\ \sigma_v = 1,\ h = 1.2\mu m,\ L = 5000\mu m,\ R = 2077\frac{J}{kgK}$,

$\eta = 19\cdot 10^{-6}\,Pa\ s,\ T = 293K,\ p_e = 10^5\,Pa$

А) Одредити масени проток хелиума ако је:однос притиска на улазу и излазу: $\frac{p_i}{p_e} = 1{,}2$; $\frac{p_i}{p_e} = 1{,}5$; $\frac{p_i}{p_e} = 2$; $\frac{p_i}{p_e} = 5$; $\frac{p_i}{p_e} = 10$.

Б) Ако је масени проток $\dot{m} = 5\cdot 10^{-11}\frac{kg}{s}$ odrediti raspodelu pritiska u mikrokanalu.

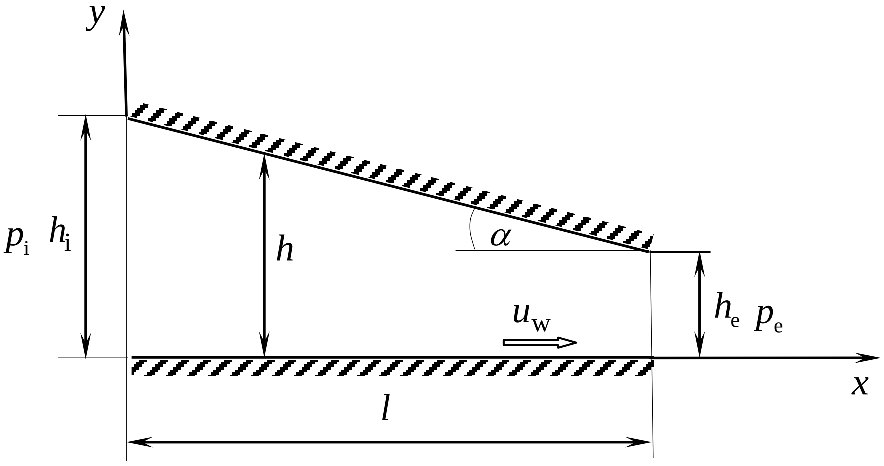
# 4. АНАЛИТИЧКО РЕШЕЊЕ ЗА ИЗОТЕРМСКО СТРУЈАЊЕ ГАСА У МИКРОЛЕЖАЈУ

Дато је тачно аналитичко решење за прорачун стишљивог дводимензијског струјања разређеног гаса у микролежајима (слика 4.1). Претпостављено је да је Рејнолдсов број при струјању гаса у лежајима мали, па је утицај инерције занемарен. Добијено аналитичко решење омогућава одређивање расподеле притиска, тј. носивости микролежаја. Ово решење обухвата и струјање гаса кроз лежај класичних димензија када клизање на зиду не долази до изражаја. Тако је,полазећи од сложенијег модела који узима у обзир утицај клизања на зиду, добијено аналитичко решење Рајнолдсове једначине подмазивања, која је позната у литератури и односи се на класичан лежај, а која до сада није аналитички решена.

Једначина континуитета и количине кретања која описује ово струјање је:

$$\dot{m} = \int_0^h \rho u \, \mathrm{d}y \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{4.2}$$




Слика 4.1 Геометрија микролежаја.

У циљу веће тачности решења која се односе на област струјања са клизањем као и проширења примене добијеног решења на прелазну област, користе се гранични услови другог реда:

$$y = 0: \quad u = u_0 = u_w + \mathrm{A}_1\lambda \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} - \mathrm{A}_2\lambda^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} \tag{4.3}$$

$$y = h(x): \quad u = u_1 = -\mathrm{A}_1 \lambda \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h} - \mathrm{A}_2 \lambda^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=h} \tag{4.4}$$

У литератури постоји низ понуђених приступа различитих аутора за одређивање вредности коефицијената $A_1$ и $A_2$.

| Аутор | година | $A_1$ | $A_2$ |
|---|---|---|---|
| Максвел | 1879 | 1 | 0 |
| Шамберг | 1947 | 1 | $5\pi/12$ |
| Дајслер | 1964 | 1 | $9/8$ |
| Хсиа-Домото | 1983 | 1 | 0.5 |
| Карниадакис-Бескок | 2002 | 1 | -0.5 |
| Локерби | 2004 | 1 | 0.15-0.19 |

Табела 4.1 Теоријске вредности коефицијената клизања $A_1$ и $A_2$ проистекле из различитих модела

Израз за поље брзине у микролежају следи из једначине количине кретања (4.2) и граничних услова (4.3) и (4.4)

$$u = \frac{h^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{y^2}{h^2} - \left(u_0 - u_1 + \frac{h^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\frac{y}{h} + u_0 \tag{4.5}$$

где је $h = h(x)$, $u_0 = u_0(x)$ и $u_1 = u_1(x)$.

Како је струјање изотермско густина зависи само од притиска, а како притисак зависи само од координате $x$ следи да је $\rho = \rho(x)$, па је једначина континуитета:

$$\dot{m} = \rho(x) h(x) \int_0^h u(y)\,\mathrm{d}y \tag{4.6}$$

Увођењем решења за брзину (4.5) у једначину континуитета (4.6) налази се једначина за промену притиска дуж микроканала:

$$\dot{m} = \frac{ph}{2RT}\left(u_0 + u_1 - \frac{h^2}{6\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) \tag{4.7}$$

Из граничних услова (4.3), (4.4) и решења за брзину (4.5), следи да је збир брзина гаса на доњем и горњем зиду:

$$u_0 + u_1 = u_w - \frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{A}_1 h\lambda + 2\mathrm{A}_2\lambda^2\right) \tag{4.8}$$

Коришћењем следећих размера: висине лежаја на излазу $h_\mathrm{e}$ за висину, дужине лежаја $l$ за подужну координату $x$, брзине покретног зида $u_\mathrm{w}$ за брзину, притиска на излазу тј. улазу $p_\mathrm{e} = p_\mathrm{i}$ за притисак , дефинишу се бездимензијске величине $H = h/h_\mathrm{e}$, $X = x/l$, $U = u/u_\mathrm{w}$, $P = p/p_\mathrm{e}$, а једначина (4.8) у бездимензијском облику је

$$U_0 + U_1 = 1 - \frac{6H^2}{\Lambda}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}X}\left(\mathrm{A}_1 Kn_e \frac{1}{HP} + 2\mathrm{A}_2 Kn_e^2 \frac{1}{H^2P^2}\right) \tag{4.9}$$

где је $\Lambda = \dfrac{6\eta u_\mathrm{w} l}{p_\mathrm{e} h_\mathrm{e}^2}$ карактеристика лежаја, а $Kn_\mathrm{e} = \lambda_\mathrm{e}/h_\mathrm{e}$ референтна вредност Кнудсеновог броја дефинисана за излазни пресек. Имајући у виду да је локална вредност Кнудсеновог броја $Kn = \lambda/h$ следи да је $Kn = Kn_e/PH$ .

Једначина (4.7) у бездимензијском облику је:

$$m = PH\left(U_0 + U_1 - \frac{H^2}{\Lambda}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}X}\right) \tag{4.10}$$

где је $m = \dfrac{\dot{m}}{\dot{m}_C}$, при чему је $\dot{m}_C = \dfrac{u_w p_e h_e}{2RT}$ Куетов део масеног протока у излазном пресеку. Увођењем израза (4.9) за збир брзине гаса на доњем и горњем зиду у једначину (4.10) следи:

$$m = PH\left[1 - \frac{6H^2}{\Lambda}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}X}\left(\mathrm{A}_1 Kn_e \frac{1}{HP} + 2\mathrm{A}_2 Kn_e^2 \frac{1}{H^2P^2}\right)\right] - \frac{PH^3}{\Lambda}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}X} \tag{4.11}$$

Независно променљива $X$ може се заменити независно променљивом $H$. Како је $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}X} = \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}H}\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}X}$, при чему је за линеарну промену попречног пресека микроканала ( $H = H_i - \left(H_i - 1\right)X$ ) $\dfrac{dH}{dX} = 1 - H_i$ једначина (4.11) може се написати као:

$$m = PH\left[1 - \frac{6H^2}{\Lambda}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}H}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}X}\left(\mathrm{A}_1 Kn_e \frac{1}{HP} + 2\mathrm{A}_2 Kn_e^2 \frac{1}{H^2P^2}\right)\right] - \frac{PH^3}{\Lambda}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}H}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}X} \tag{4.12}$$

Увођењем променљиве $\Pi$ која у себи садржи и зависно променљиву $P$ и независно променљиву $H$

$$\Pi = \frac{1}{PH} \tag{4.13}$$

две променљиве које зависе од координате $X$ замењене су једном. Како је

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}H} = -\frac{1}{PH^2} - \frac{1}{P^2H}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}H} \tag{4.14}$$

следи да је

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}H}=-P^2H\left(\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}H}+\frac{1}{PH^2}\right)=-\frac{1}{\Pi^2H}\left(\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}H}+\frac{\Pi}{H}\right) \tag{4.15}$$

једначина (4.12) трансформисана у нови облик где је уместо притиска $P$ уведена променљива $\Pi$ је:

$$m=\frac{1}{\Pi}\left[1-\frac{6H^2}{\Lambda}\quad\underset{-\frac{1}{\Pi^2H}\left(\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}H}+\frac{\Pi}{H}\right)}{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}H}}\quad\overset{1-H_\mathrm{i}}{\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}X}}\left(\mathrm{A}_1Kn_e\frac{1}{HP}+2\mathrm{A}_2Kn_e^2\frac{1}{H^2P^2}\right)\right]$$

$$-\frac{PH^3}{\Lambda}\quad\underset{-\frac{1}{\Pi^2H}\left(\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}H}+\frac{\Pi}{H}\right)}{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}H}}\quad\overset{1-H_\mathrm{i}}{\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}X}}$$

(4.16)

$$\frac{H_\mathrm{i}-1}{\Lambda}\left(H\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}H}+\Pi\right)\left[1+6A_1Kn_\mathrm{e}\Pi+12A_2Kn_\mathrm{e}^2\Pi^2\right]=\Pi^2\left(1-m\Pi\right)$$

(4.17)

Одговарајући гранични услови за ову диференцијалну једначину су:

$$X=0:\quad H=H_\mathrm{i}\,,\,\Pi=1/H_\mathrm{i} \tag{4.18}$$

$$X=1:\quad H=1,\,\Pi=1 \tag{4.19}$$

Може се уочити да израз у другој загради леве стране једначине (4.17) зависи само од $Kn_\mathrm{e}\Pi$ без обзира на коришћени модел граничног услова, тј. $1+6Kn_\mathrm{e}\Pi\left(A_1+A_2Kn_\mathrm{e}\Pi\right)=1+F\left(Kn_\mathrm{e}\Pi\right)$.

Раздвајањем променљивих и налажењем интеграла у границама од произвољног пресека у микролежају до излаза следи

$$\ln H=\int_{\Pi}^{1}\frac{\left[1+F\left(Kn_{\mathrm{e}}t\right)\right]\mathrm{d}t}{t\left[1+F\left(Kn_{\mathrm{e}}t\right)-\dfrac{\Lambda}{H_{\mathrm{i}}-1}t\left(1-mt\right)\right]} \tag{4.20}$$

Решење овог интеграла представља решење за поље притиска у микролежају, а у посебном случају када је $Kn_{\mathrm{e}}=0$ решење за класичан лежај. Након замене функције $F=\left(Kn_{\mathrm{e}}z\right)$ у (4.20) следи

$$\ln H=\int_{\Pi}^{1}\frac{1+6\mathrm{A}_1Kn_{\mathrm{e}}t+12\mathrm{A}_2Kn_{\mathrm{e}}^2t^2}{t\left(1+\mathrm{C}_1t+\mathrm{C}_2t^2\right)}\mathrm{d}t \tag{4.21}$$

где је $\mathrm{C}_1=6\mathrm{A}_1Kn_{\mathrm{e}}-\Lambda/\left(H_{\mathrm{i}}-1\right)$ и $\mathrm{C}_2=12\mathrm{A}_2Kn_{\mathrm{e}}^2+m\Lambda/\left(H_{\mathrm{i}}-1\right)$. Интеграл (4.21) има два могућа решења. Ако је $\mathrm{C}_1^2-4\mathrm{C}_2\geq 0$ решење је

$$\ln H=-\ln\Pi-\frac{m\Lambda}{2\mathrm{C}_2\left(H_{\mathrm{i}}-1\right)}\ln\left(\frac{\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_1+1}{\mathrm{C}_2\Pi^2+\mathrm{C}_1\Pi+1}\right)+\frac{\Lambda}{H_{\mathrm{i}}-1}\left(1+\frac{m\mathrm{C}_1}{2\mathrm{C}_2}\right)$$
$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{C}_1^2-4\mathrm{C}_2}}\cdot\ln\frac{\left(2\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_1-\sqrt{\mathrm{C}_1^2-4\mathrm{C}_2}\right)\left(2\mathrm{C}_2\Pi+\mathrm{C}_1+\sqrt{\mathrm{C}_1^2-4\mathrm{C}_2}\right)}{\left(2\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_1+\sqrt{\mathrm{C}_1^2-4\mathrm{C}_2}\right)\left(2\mathrm{C}_2\Pi+\mathrm{C}_1-\sqrt{\mathrm{C}_1^2-4\mathrm{C}_2}\right)} \tag{4.22}$$

Вредност параметра $m$ се налази применом граничног услова за (4.18) за улазни пресек микроканала у решењу (4.22):

$$m=\frac{2\mathrm{C}_2}{\sqrt{\mathrm{C}_1^2-4\mathrm{C}_2}}\left(1+\frac{m\mathrm{C}_1}{2\mathrm{C}_2}\right)\frac{1}{\ln\left[\dfrac{h_{\mathrm{i}}^2\left(\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_1+1\right)}{\mathrm{C}_2+h_{\mathrm{i}}\mathrm{C}_1+h_{\mathrm{i}}^2}\right]}$$
$$\cdot\ln\frac{\left(2\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_1-\sqrt{\mathrm{C}_1^2-4\mathrm{C}_2}\right)\left(2\mathrm{C}_2/h_{\mathrm{i}}+\mathrm{C}_1+\sqrt{\mathrm{C}_1^2-4\mathrm{C}_2}\right)}{\left(2\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_1+\sqrt{\mathrm{C}_1^2-4\mathrm{C}_2}\right)\left(2\mathrm{C}_2/h_{\mathrm{i}}+\mathrm{C}_1-\sqrt{\mathrm{C}_1^2-4\mathrm{C}_2}\right)} \tag{4.23}$$

Када је $\mathrm{C}_1^2-4\mathrm{C}_2<0$ решење интеграла (4.21) је:

$$\ln H = -\ln \Pi - \frac{m\Lambda}{2\mathrm{C}_2\left(H_\mathrm{i}-1\right)}\ln\left(\frac{\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_1+1}{\mathrm{C}_2\Pi^2+\mathrm{C}_1\Pi+1}\right)$$
$$+\frac{2\Lambda}{H_\mathrm{i}-1}\left(1+\frac{m\mathrm{C}_1}{2\mathrm{C}_2}\right)\frac{1}{\sqrt{4\mathrm{C}_2-\mathrm{C}_1^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\left(1-\Pi\right)\sqrt{4\mathrm{C}_2-\mathrm{C}_1^2}}{2\left(1+\mathrm{C}_2\Pi\right)+\mathrm{C}_1\left(1+\Pi\right)} \quad (4.24)$$

Сада се коефицијент *m* налази из овог решења на исти начин као и у предходном случају коришћењем граничног услова: $H = H_\mathrm{i}, \Pi = 1/H_\mathrm{i}$ :

$$m = \frac{4\mathrm{C}_2+2m\mathrm{C}_1}{\sqrt{4\mathrm{C}_2-\mathrm{C}_1^2}}\frac{1}{\ln\dfrac{H_\mathrm{i}^2\left(\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_1+1\right)}{\mathrm{C}_2+H_\mathrm{i}\mathrm{C}_1+H_\mathrm{i}^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\left(H_\mathrm{i}-1\right)\sqrt{4\mathrm{C}_2-\mathrm{C}_1^2}}{2\left(H_\mathrm{i}+\mathrm{C}_2\right)+\mathrm{C}_1\left(H_\mathrm{i}+1\right)}$$

(4.25)

За познату вредност карактеристике лежаја $\Lambda$, однос улазне и излазне висине лежаја $H_\mathrm{i}$, Кнудсенов број у излазном пресеку $Kn_\mathrm{e}$ као и вредност коефицијената $A_1$ и $A_2$ изабраног граничног услова, претпостави се почетна вредност коефицијента *m*. Итеративним путем, водећи рачуна да ли је $\mathrm{C}_1^2-4\mathrm{C}_2$ позитивно или негативно одређује се *m* из израза (4.23) или (4.25). Сада је на основу једначина (4.22) и (4.24) потпуно дефинисана веза између променљивих $\Pi$ и $H$. Како није могуће из ових једначина експлицитно изразити $\Pi$, а из граничних услова је познато да се вредност променљиве $\Pi$ мења од улазног пресека $\Pi = 1/H_\mathrm{i}$ до излазног $\Pi = 1$, за задату вредност $\Pi$ која је у овом опсегу, из једначина (4.22) и (4.24) налази се одговарајућа вредност $H$ . На крају, израчунава се и притисак из релације $\Pi = \dfrac{1}{HP}$.

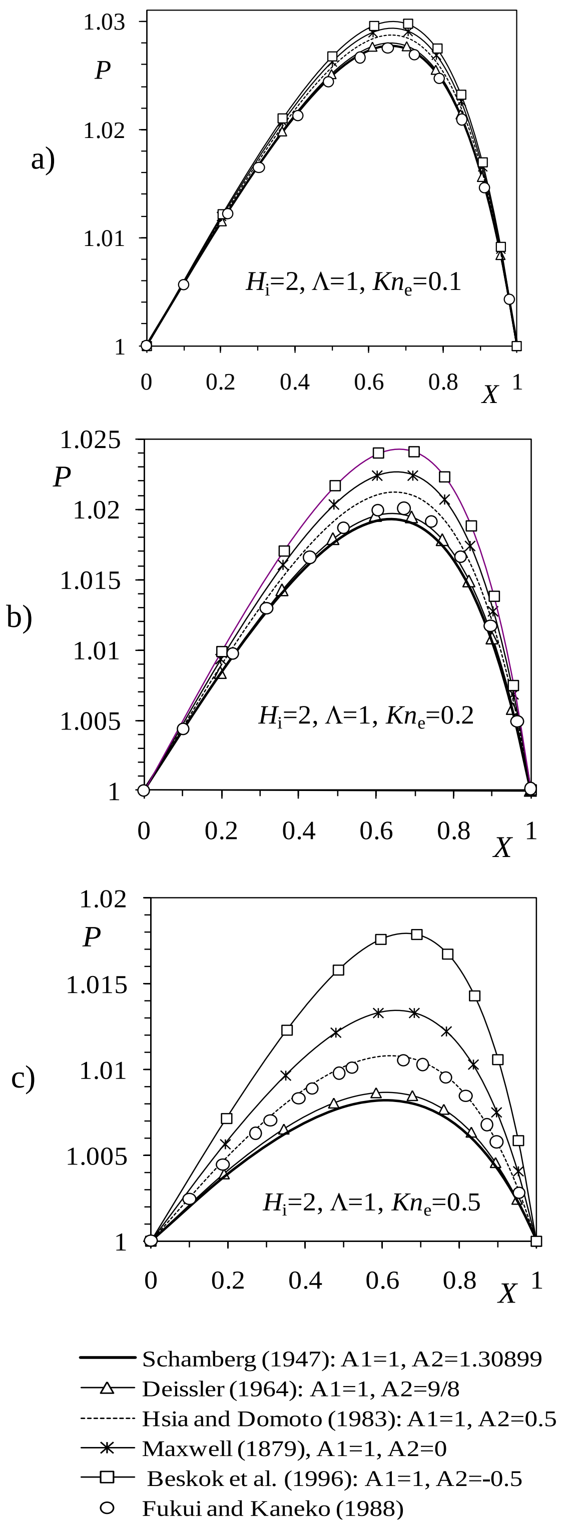
На сликама 4.2 и 4.3 приказана је расподела притиска у микроканалу чија је промена попречног пресека дефинисана линеарним законом када је однос висине микроканала на улазу и излазу $H_\mathrm{i} = 2$. Резултати су добијени за три вредности карактеристике микролежаја ($\Lambda = 1$, $\Lambda = 10$ и $\Lambda = 100$), као и за три вредности референтног Кнудсеновог броја

($Kn_e = 0.1, Kn_e = 0.2$ и $Kn_e = 0.5$). Примена граничних услова другог реда даје могућност примене добијеног решења на део прелазне области, па су у циљу испитивања границе примене добијена решења и за релативно веће вредности Кнудсеновог броја које припадају прелазној област ($Kn_e = 0.2$ и $Kn_e = 0.5$). Уочава се да гранични услов Шамберга (Schamberg, 1947) даје најбоље слагање са нумеричким решењем Болцманове једначине (Fukui и Kaneko, 1988; 1990) за област клизања ($Kn_e = 0.1$), док је за почетак прелазне области ($Kn_e = 0.2$) најпогодније користити Дајслеров гранични услов (Deissler, 1964**)**. Показано је да ово аналитичко решење може да се примени и на веће вредности Кнудсеновог броја ($Kn_e = 0.5$) и да тада највећу тачност обезбеђује гранични услов Хсиа–Домота (Hsia и Domoto, 1983). Ова три гранична услова дају решења задовољавајуће тачности за све приказане случајеве. Кроз решења приказана на сликама 4.2 и 4.3 показује се да у литератури оспораван гранични услов Бескока и Карниадакиса заиста доводи до решења које одступа од нумеричког решења Болцманове једначине, што указује на нетачност овог граничног услова. Поређењем резултата добијених применом Максвеловог граничног услова првог реда са решењима добијеним применом Шамберговог, Дајслеровог или Хсиа-Домотовог граничног услова другог реда, уочава се допринос другог члана у граничном услову који доводи до веће тачности решења. Значај примене граничног услова другог реда је већи за веће вредности Кнудсеновог броја $Kn_e$ и мању вредност карактеристике микролежаја $\Lambda$.

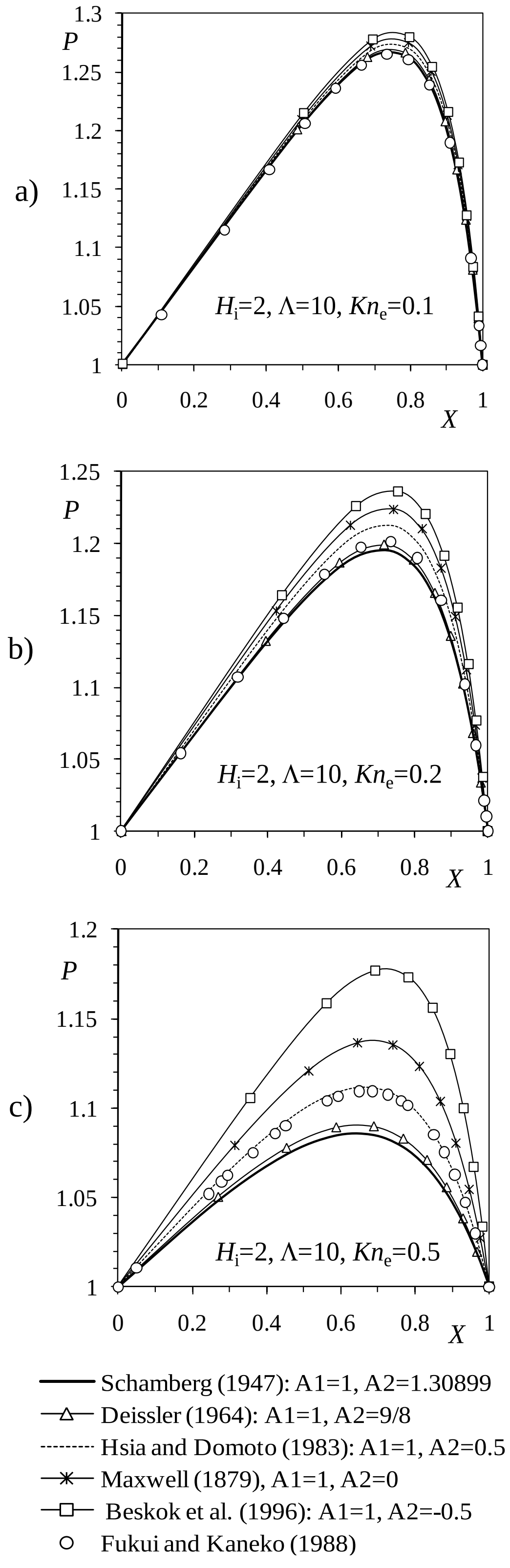
У табелама 4.1 и 4.2 дата је вредност параметра *m* за режиме струјања дате на сликама 4.2 и 4.3. Уочава се да вредност *m*, тј. односа укупног масеног протока кроз лежај ($\dot{m}$) и масеног протока који је последица Куетовог струјања ($\dot{m}_C$), расте са порастом карактеристике лежаја $\Lambda$.

Из општег аналитичког решења које обухвата утицај клизања на зиду лако се изостављањем тог утицаја тј. увођењем у једначине

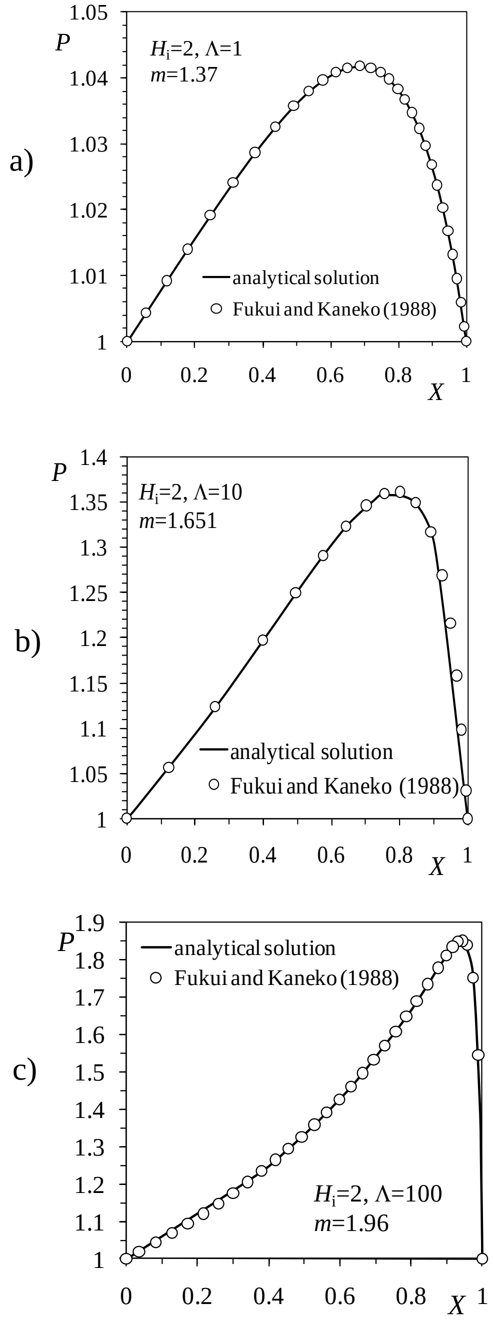
(4.21)–(4.25) да је $Kn_e = 0$, добити решење за расподелу притиска у класичном лежају. То претставља решење Рејнолдсове једначине подмазивања које до сада није дато у литератури. До сада се расподела притиска у лежају која следи из Рејнолдсове једначине налазила само нумерички. На слици 4.4 приказана је расподела притиска у лежајима за три вредности карактеристике $\Lambda$ ($\Lambda = 1, \Lambda = 10, \Lambda = 100$) у којима струји гас у условима континуума када је брзина гаса на зиду једнака брзини зида. Приказани резултати се веома добро слажу са нумеричким решењем Болцманове једначине.




Слика 4.2 Промена притиска у лежају када је однос улазне и излазне висине $h_{\mathrm{i}} = 2$ и карактеристика лежаја $\Lambda = 1$, за вредности референтног Кнудсеновог броја: а) $Kn_{\mathrm{e}} = 0.1$, б) $Kn_{\mathrm{e}} = 0.2$, в) $Kn_{\mathrm{e}} = 0.5$.




Слика 4.3 Промена притиска у лежају када је однос улазне и излазне висине $h_i = 2$ и карактеристика лежаја $\Lambda = 10$, за вредности референтног Кнудсеновог броја: а) $Kn_e = 0.1$, б) $Kn_e = 0.2$, в) $Kn_e = 0.5$.




Слика 4.4 Промена притиска у лежају када нема клизања на зиду $Kn = 0$, при односу улазне и излазне висине $h_i = 2$, за три вредности карактеристике лежаја: а) $\Lambda = 1$, б) $\Lambda = 10$, в) $\Lambda = 100$.

| $m$ | $\Lambda = 1$ | | |
|---|---|---|---|
| | $Kn_e$=0.1 | $Kn_e$=0.2 | $Kn_e$=0.5 |
| Шамберг: $A_1$=1, $A_2 = 5\pi/12$ | 1.3786 | 1.38684499 | 1.40439725 |
| Дајслер:$A_1$=1, $A_2 = 9/8$ | 1.3782 | 1.38571453 | 1.40227306 |
| Хсиа-Домото: $A_1$=1, $A_2$=0.5 | 1.3765 | 1.38148332 | 1.39278746 |
| Максвел: $A_1$=1, $A_2$=0 | 1.3752 | 1.37757981 | 1.3810488 |
| Карниадакис-Бескок: $A_1$=1, $A_2$=-0.5 | 1.3738 | 1.37322569 | 1.36167467 |

Табела 4.1 Вредност параметра *m* за микролежај при коришћењу различитих граничних услова, код кога је $H_\mathrm{i} = 2$, $\Lambda = 1$ за три вредности референтног Кнудсеновог броја $Kn_e$=0.1, $Kn_e$=0.2 и $Kn_e$=0.5

| $m$ | $\Lambda = 10$ | | |
|---|---|---|---|
| | $Kn_e$=0.1 | $Kn_e$=0.2 | $Kn_e$=0.5 |
| Шамберг: $A_1$=1, $A_2 = 5\pi/12$ | 1.58956611 | 1.54328227 | 1.47459769 |
| Дајслер:$A_1$=1, $A_2 = 9/8$ | 1.59080327 | 1.54496276 | 1.47629285 |
| Хсиа-Домото: $A_1$=1, $A_2$=0.5 | 1.592893 | 1.55106 | 1.48381305 |
| Максвел:$A_1$=1, $A_2$=0 | 1.59501112 | 1.55639172 | 1.4926697 |
| Карниадакис-Бескок:$A_1$=1, $A_2$=-0.5 | 1.59770358 | 1.56220996 | 1.50598752 |

Табела 4.2 Вредност параметра *m* за микролежај при коришћењу различитих граничних услова, код кога је $H_\mathrm{i} = 2$, $\Lambda = 10$ за три вредности референтног Кнудсеновог броја $Kn_e$=0.1, $Kn_e$=0.2 и $Kn_e$=0.5.