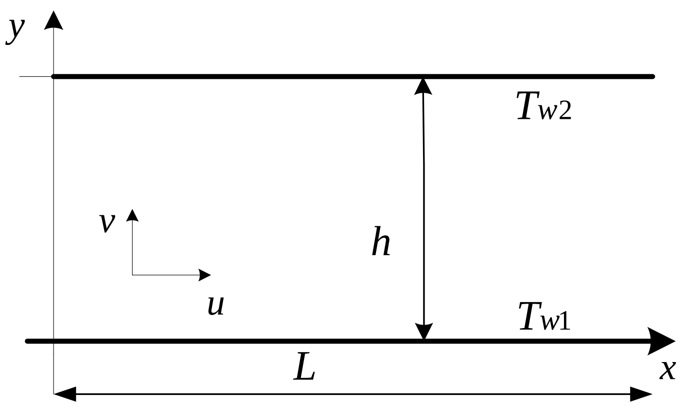
5. НЕИЗОТЕРМСКО СТРУЈАЊЕ ГАСА У МИКРОКАНАЛИМА КОНСТАНТНОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА (услед разлике притиска на улазу и излазу)

Анализирано је дводимензијско неизотермско стишљиво струјање гаса у микроканалима константног попречног пресека (слика 2.1). Температура зидова је различита (температура доњег зида је T_{w1}, а горњег T_{w2} .



Слика 2.1 Микроканал промењљивог попречног пресека.

Оба зида микроканала су непокретна, а струјање гаса се дешава захваљујући разлици притиска на улазу и излазу канала. Анализирана су струјања у режиму клизања. Описано струјање има једнодимензијски карактер (једна компонента брзине која зависи од две координате). Осим тога промене брзине у правцу струјања су мање у односу на промене по попречном пресеку. Зависност коефицијент вискозности и топлотне проводљивости од температуре је занемарена, тј. претпостављено је да ови коефицијенти имају константне вредности. С обзиром на поменуте услове струјања и претпоставке, једначине одржања масе у интегралном облику, количине кретања, енергије и једначина стања којима се описује ово струјање су:

$$\dot{m} = \int_{0}^{h} \rho u \mathrm{d}y \qquad (5.1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \qquad (5.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (5.3)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (5.4)$$

$$p = \rho RT \qquad (5.5)$$

Гранични услови клизања првог реда за доњи и горњи зидсу:

$$y = 0: \qquad u = \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\lambda \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} \qquad (5.6)$$

$$y = h: \qquad u = -\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\lambda \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h} \qquad (5.7)$$

Гранични услови температурског скока на доњем и горњем зиду су:

$$y = 0: \qquad T = T_{w1} + \frac{2-\sigma_T}{\sigma_T}\frac{2\kappa}{(\kappa+1)}\frac{\lambda}{Pr}\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} \qquad (5.8)$$

$$y = h: \qquad T = T_{w2} - \frac{2-\sigma_T}{\sigma_T}\frac{2\kappa}{(\kappa+1)}\frac{\lambda}{Pr}\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=h} \qquad (5.9)$$

Како је дужина слободног пута молекула

$$\lambda = \frac{\eta}{p}\sqrt{\frac{\pi RT}{2}} \qquad (5.10)$$

може се дефинисати референтна вредност дужине слободног пута молекула преко референтне температуре и референтног притиска. Може се усвојити да је референтни притисак p_r притисак у излазном пресеку канала, а референтна температура средња вредност температуре горњег и доњег зида $T_r = \dfrac{T_{w1} + T_{w2}}{2}$, па је

$$\lambda_r = \frac{\eta}{p_r}\sqrt{\frac{\pi R T_r}{2}} \tag{5.11}$$

Сада се локалана вредност дужине слободног пута молекула може изразити преко референтне:

$$\lambda = \frac{\lambda_r p_r}{\sqrt{T_r}}\frac{\sqrt{T}}{p} \tag{5.12}$$

А гранични услови за брзину и температуру могу се написати као:

$$y = 0: \qquad u = \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\frac{\lambda_r p_r}{\sqrt{T_r}}\frac{\sqrt{T}}{p}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} \qquad (5.13))$$

$$y = h: \qquad u = -\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\frac{\lambda_r p_r}{\sqrt{T_r}}\frac{\sqrt{T}}{p}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h} \tag{5.14}$$

Гранични услови температурског скока на доњем и горњем зиду су:

$$y = 0: \qquad T = T_{w1} + \frac{2-\sigma_T}{\sigma_T}\frac{2\kappa}{(\kappa+1)}\frac{\lambda_r p_r}{\sqrt{T_r}}\frac{\sqrt{T}}{p}\frac{1}{Pr}\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} \tag{5.15}$$

$$y = h: \qquad T = T_{w2} - \frac{2-\sigma_T}{\sigma_T}\frac{2\kappa}{(\kappa+1)}\frac{\lambda_r p_r}{\sqrt{T_r}}\frac{\sqrt{T}}{p}\frac{1}{Pr}\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=h} \tag{5.16}$$

Из енергијске једначине следи решење за поље температуре

$$T = C_1 y + C_2 \tag{5.17}$$

Константе C_1 и C_2 одређују се из граничних услова:

$$y = 0: \qquad T_{w1} + \frac{2-\sigma_T}{\sigma_T}\frac{2\kappa}{(\kappa+1)}\frac{\lambda_r p_r}{\sqrt{T_r}}\frac{\sqrt{C_2}}{p}\frac{1}{Pr}C_1 = C_2 \tag{5.18}$$

$$y = h: \qquad T_{w2} - \frac{2-\sigma_T}{\sigma_T}\frac{2\kappa}{(\kappa+1)}\frac{\lambda_r p_r}{\sqrt{T_r}}\frac{\sqrt{C_1 h + C_2}}{p}\frac{1}{Pr}C_1 = C_1 h + C_2$$

(5.19)

Из јеначине количине кретања следи решење за брзину:

$$u = \frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{y^2}{2} + C_3 y + C_4 \qquad (5.20)$$

Применом граничних услова за брзину (5) и (6) одређују се константе C_3 и C_4:

$$y = 0: \quad \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\frac{\lambda_r p_r}{\sqrt{T_r}}\frac{\sqrt{C_2}}{p}C_3 = C_4 \qquad (5.21)$$

$$y = h: \quad -\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\frac{\lambda_r p_r}{\sqrt{T_r}}\frac{\sqrt{C_1 h + C_2}}{p}\left(\frac{h}{\eta}\frac{dp}{dx} + C_3\right) = \frac{h^2}{2\eta}\frac{dp}{dx} + C_3 h + C_4$$

(5.22)

Да би се одредиле константе C_1, C_2, C_3 и C_4 потребно је одредити промену притиска дуж микроканала тј. одредити dp/dx. При решавању проблема струјања гаса кроз микроканал проблем се може дефинисати на два начина:1. Познат је масени проток, а потребно је одредитиоднос притиска на улазу и излазу и 2. Познат је однос притиска на улазу и излазу, а потребно је одредити масени проток. Ова веза између масеног протока и притиска следи из једначине континуитета уводећи у њу добијене изразе за поље брзине и температуре:

$$\dot{m} = \int_0^h \rho u \mathrm{d}y = \int_0^h \frac{p}{RT}u\mathrm{d}y = \frac{p}{R}\int_0^h \frac{\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} + C_3 y + C_4}{C_1 y + C_2}\mathrm{d}y$$

(5.23)

Како C_1, C_2, C_3 и C_4 зависе само од подужне координате x налази се решење интеграла :

$$\dot{m} = \frac{p}{RC_1}\left[\left(\frac{dp}{dx}\frac{C_2^2}{2\eta C_1^2} - \frac{C_2 C_3}{C_1} + C_4\right)\ln\frac{C_1 h + C_2}{C_2} + \frac{dp}{dx}\frac{1}{2\eta}\left(\frac{h^2}{2} - \frac{C_2 h}{C_1}\right) + C_3 h\right]$$

(5.24)

....

Сада располажемо са пет једначина из којих је потребно одредити пет непознатих величина: притисак и C_1, C_2, C_3, C_4.

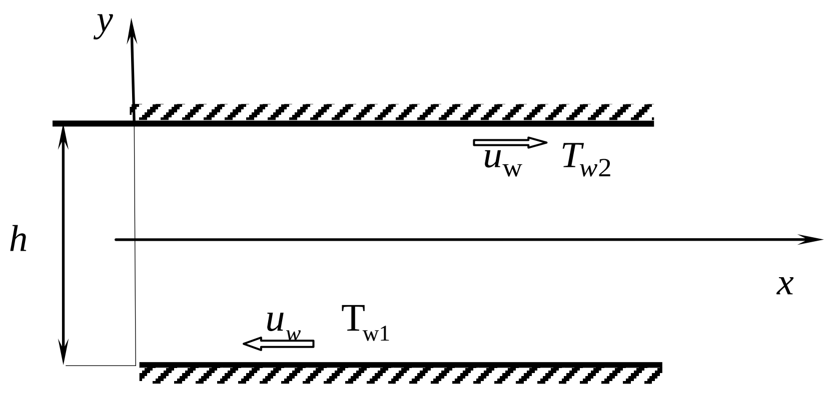
6. АНАЛИТИЧКО РЕШЕЊЕ ЗА МИКРО-КУЕТОВО НЕИЗОТЕРМСКО СТРУЈАЊЕ ГАСА ПРИ РАЗЛИЧИТИМ И КОНСТАНТНИМ ТЕМПЕРАТУРАМА ЗИДОВА

Анализира се струјање разређеног гаса између паралелних плоча проузроковано њиховим кретањем (слика 6.1). Растојање између плоча је реда величине микрона, па се остварује микро-Куетово струјање. Зидови се крећу брзинама истог интензитета u_w, а супротних смерова. Растојање између плоча је h . Температуре зидова су различите али константне. Температура доњег зида је T_{w1}, а температура горњег је T_{w2}. Претпостављено је да је Рејнолдсов број при струјању гаса мали, па је утицај инерције занемарен.

Једначина количине кретања и енергије које описују ово струјање је уз претпоставку да се величине мењају само у попречном правцу су:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{6.2}$$



Слика 6.1 Микро-Куетово струјање.

Једначине (6.1) и (6.2) су диференцијалне једначине другог реда за чије решавање и добијање коначног решења се користе гранични услови клизања и температурског скока на доњем и горњем зиду:

$$y=-\frac{h}{2}: \qquad u=-u_w+\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\lambda\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=-\frac{h}{2}} \qquad (6.3)$$

$$y=\frac{h}{2}: \qquad u=u_w-\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\lambda\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\frac{h}{2}} \qquad (6.4)$$

Гранични услови температурског скока на доњем и горњем зиду су:

$$y=-\frac{h}{2}: \qquad T=T_{w1}+\frac{2-\sigma_T}{\sigma_T}\frac{2\kappa}{(\kappa+1)}\frac{\lambda}{Pr}\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=-\frac{h}{2}} \qquad (6.5)$$

$$y=\frac{h}{2}: \qquad T=T_{w2}-\frac{2-\sigma_T}{\sigma_T}\frac{2\kappa}{(\kappa+1)}\frac{\lambda}{Pr}\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=\frac{h}{2}} \qquad (6.6)$$

Како је дужина слободног пута молекула

$$\lambda=\frac{\eta}{p}\sqrt{\frac{\pi RT}{2}} \qquad (6.7)$$

може се дефинисати референтна вредност дужине слободног пута молекула преко референтне температуре и референтног притиска. Како код Куетовог струјања нема промене величина у правцу струјања, а из једначине количине кретања за y правац следи да у попречном пресеку нема промене притиска, може се закључити да је притисак константан у целом струјном пољу. Референтна температура се дефинише као средња вредност температуре горњег и доњег зида $T_r=\frac{T_{w1}+T_{w2}}{2}$, па је

$$\lambda_r=\frac{\eta}{p}\sqrt{\frac{\pi RT_r}{2}} \qquad (6.8)$$

Сада се локалана вредност дужине слободног пута молекула може изразити преко референтне:

$$\lambda = \frac{\lambda_r \sqrt{T}}{\sqrt{T_r}} \qquad (6.9)$$

А гранични услови за брзину и температуру могу се написати као:

$$y = -\frac{h}{2}: \qquad u = -u_w + \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} \frac{\lambda_r \sqrt{T}}{\sqrt{T_r}} \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=-\frac{h}{2}} \qquad (6.10)$$

$$y = \frac{h}{2}: \qquad u = u_w - \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} \frac{\lambda_r \sqrt{T}}{\sqrt{T_r}} \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\frac{h}{2}} \qquad (6.11)$$

Гранични услови температурског скока на доњем и горњем зиду су:

$$y = -\frac{h}{2}: \qquad T = T_{w1} + \frac{2-\sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\kappa}{(\kappa+1)} \frac{\lambda_r \sqrt{T}}{\sqrt{T_r}} \frac{1}{Pr} \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=-\frac{h}{2}} \qquad (6.12)$$

$$y = \frac{h}{2}: \qquad T = T_{w2} - \frac{2-\sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\kappa}{(\kappa+1)} \frac{\lambda_r \sqrt{T}}{\sqrt{T_r}} \frac{1}{Pr} \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=\frac{h}{2}} \qquad (6.13)$$

Из енергијске једначине следи решење за поље температуре

$$T = C_1 y + C_2 \qquad (6.14)$$

Константе C_1 и C_2 одређују се из граничних услова (6.12) и (6.13):

$$y = -\frac{h}{2}: \qquad T_{w1} + \frac{2-\sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\kappa}{(\kappa+1)} \frac{\lambda_r}{\sqrt{T_r}} \frac{1}{Pr} C_1 \sqrt{-C_1 \frac{h}{2} + C_2} = -C_1 \frac{h}{2} + C_2$$

(6.15)

$$y = \frac{h}{2}: \qquad T_{w2} - \frac{2-\sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\kappa}{(\kappa+1)} \frac{\lambda_r}{\sqrt{T_r}} \frac{1}{Pr} C_1 \sqrt{C_1 \frac{h}{2} + C_2} = C_1 \frac{h}{2} + C_2$$

(6.16)

Из јеначине количине кретања следи решење за брзину:

$$u = C_3 y + C_4 \qquad (6.17)$$

Применом граничних услова за брзину (6.10) и (6.11) узимајући у обзир изразе (6.14) и (6.17) за температуру и брзину, одређују се константе C_3 и C_4:

$$y=-\frac{h}{2}: \qquad -u_w+\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\frac{\lambda_r}{\sqrt{T_r}}C_3\sqrt{-C_1\frac{h}{2}+C_2}=-C_3\frac{h}{2}+C_4 \quad (6.18)$$

$$y=\frac{h}{2}: \qquad u_w-\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\frac{\lambda_r}{\sqrt{T_r}}C_3\sqrt{C_1\frac{h}{2}+C_2}=C_3\frac{h}{2}+C_4 \quad (6.19)$$

Нумеричким решавањем система једначина (6.15) и (6.16) одређују се константе C_1 и C_2. На тај начин је поље температуре поптпуно одређено. Након тога одређују се константе C_3 и C_4 из система једначина (6.18) и (6.19) чиме је поље брзине одређено.

Задатак: Одредити поље брзине и температуре за микро-Куетово струјање ако је у питању струјање хелијума између паралелних плоча:

$$Kn_r=0.1,\ \sigma_v=1,\ \sigma_T=1, h=1.2\mu m,\ R=2077\frac{J}{kgK},$$
$$\eta=19\cdot10^{-6}\,Pa\ s,\ T_{w1}=293K,\ T_{w2}=300K,\ p=10^5\,Pa$$

7. АНАЛИТИЧКО РЕШЕЊЕ ЗА МИКРО-КУЕТОВО НЕИЗОТЕРМСКО СТРУЈАЊЕ ГАСА ПРИ ЈЕДНАКИМ И КОНСТАНТНИМ ТЕМПЕРАТУРАМА ЗИДОВА

Анализиран је модел струјања који се у односу на струјање дато у поглављу 6. Разликује само у температурским граничним условима. Сада су температуре зидова једнаке и константне $T_{w1}=T_{w2}=T_w$, што доводи до симетрије профила температуре па је:

$$y=0: \qquad \frac{dT}{dy}=0$$

Узимајући у обзир да је општа добијена једначину за температуру (6.14) закључује се да је $C_1=0$. Сада применом граничног услова (6.16) следи:

$$y=\frac{h}{2}: \qquad T_w=C_2 \quad (7.1)$$

Тј. температура је константна у целом струјном пољу. Ово добијено решење је последица занемарене вискозности и дисипације у основним једначинама. Константе за поље брзине C_3 и C_4 следе из услова клизања на зиду:

$$y = -\frac{h}{2}: \qquad -u_w + \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\frac{\lambda_r}{\sqrt{T_r}} C_3 \sqrt{T_w} = -C_3 \frac{h}{2} + C_4 \tag{7.2}$$

$$y = \frac{h}{2}: \qquad u_w - \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\frac{\lambda_r}{\sqrt{T_r}} C_3 \sqrt{T_w} = C_3 \frac{h}{2} + C_4 \tag{7.3}$$

Решење овог система једначина ((7.2) и (7.3)) даје:

$$C_4 = u_w$$

$$C_3 = \frac{2u_w}{\frac{h}{2} + \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\lambda_r}$$

Сада је поље брзине дефинисано изразом:

$$u = \frac{2u_w}{\frac{h}{2} + \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\lambda_r} y + u_w \tag{7.4}$$

Јасно је да на доњем и горњем зиду брзина гаса није једнака брзини зида, тј. може се закључити до клизања гаса на зидовима.