

11. ELEKTROKINETIČKI PROTOCI

Elektrokinetika je oblast elektrotehnike koja izučava usmereno kretanje elektriciteta.

Elektrokinetičke pojave se mogu upotrebiti za proučavanje prirode i osobina dvojnog sloja. Te osobine zavise od strukture površine čestica, adsorpcije jona i drugih čestica, znaka i gustine naelektrisanja adsorbovanih jona, razlike potencijala u adsorpcionom i difuzionom sloju odnosno zeta – potencijala i dr.

Potencijal koji se javlja na granici između dve faze naziva se elektrokinetički ili zeta – potencijal. Što je više jona suprotnog naelektrisanja u adsorpcionom sloju i što je manja debljina difuzionog sloja u kome se nalaze joni suprotnog naelektrisanja, to je manji i ζ potencijal u dvojnog električnom sloju, tj. u odnosu na termodinamički potencijal.

Tabela 1 pokazuje tipične fizičke i elektrohemijske uslove za elektrokinetičke protoke.

Parametar	Opseg parametra
Tipična debljina kanala, h (μm)	0,01 ~ 300
Koncentracija elektrolita, n_0 (mM)	10 ~ 0,001
Debajeva dužina, λ_D (nm)	1 ~ 100
Zeta potencijal, ζ (mV)	$\pm 1 \sim \pm 100$
Električno polje, E (V/mm)	1 ~ 100
Brzina elektroosmoze, U (mm/s)	< 2
Rejnoldsov broj, Re	$10^{-4} \sim 1$

Tabela 1. Tipični fizički i elektrohemijski parametri korišćenji za elektrokinetičke efekte.

Brzi razvoj tehnologija na mikro nivou je omogućio raznosvrtnost mikrofluidnih sistema koji se sastoje od ventila, pumpi i mešalica i koji se koriste kao primena u medicini, farmaciji i ekologiji. Elektrokinetički efekti su važni za primenu u mikro i nano transportu.

Četiri elektrokinetička efekta značajna u elektrohidrodinamici su:

1. **Elektroforeza** - kretanje naelektrisane površi ili rastvorene materije usled dejstva električnog polja u odnosu na tečnost koja miruje;
2. **Elektroosmoza** – kretanje tečnosti u odnosu na naelektrisanu površ koje je uzrokovano dejstvom električnog polja;
3. **Sedimentacioni potencijal** – potencijal koji nastaje usled kretanja naelektrisane čestice kroz tečnost koja miruje
4. **Streaming potential** – potencijal koji nastaje kada se tečnost kreće u odnosu na naelektrisanu površ.

11.1. Elektroforeza

Elektroforeza je proces koji izaziva kretanje naelektrisanih čestica u odnosu na nepokretnu tečnost pod uticajem električnog polja, gde tečnost predstavlja provodnu sredinu. Brzina pri kojoj se naelektrisane čestice/molekuli kreću ka anodi ili katodi je poznata kao brzina elektroforetske migracije. Ovo kretanje je određeno ravnotežom između neto električnih sila naelektrisanih čestica u EDS i viskoznih sila. Stoga, brzina elektroforetske migracije je proporcionalna primenjenom električnom polju i neto naelektrisanju čestice, i obrnuto proporcionalna viskoznosti tečnosti.

Elementarni primer elektroforeze: posmatra se uticaj električnog polja

$\vec{E} \left[\frac{V}{m} \right]$ na sfernu česticu poluprečnika a i naelektrisanja Ze u tečnosti koja miruje.

Sila koja deluje na česticu usled prisustva električnog polja je

$$\vec{F}_{el} = Ze\vec{E}$$

gde je $e=1,602176487 \times 10^{-19}$ C količina naelektrisanja koju nosi jedan proton ili elektron, a Z valentni broj.

Čestica usled dejstva ove električne sile počinje da se kreće i tada na nju deluje sila otpora $\vec{F}_\eta = -6\pi\eta a\vec{u}$. Brzo se uspostavlja stacionarni režim, pa je:

$$\vec{F}_{el} + \vec{F}_\eta = 0$$

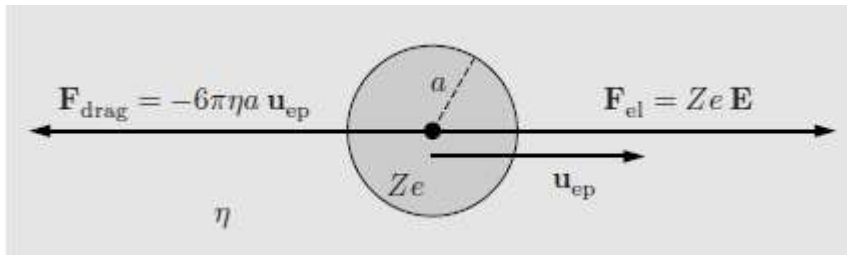


Fig. 3.2 The principle of electrophoresis. A spherical particle of charge Ze and radius a moves in a low-conductivity liquid with viscosity η under the influence of an applied electrical field E . The motion becomes steady at the velocity uep , when the Stokes drag force F drag balances the electrical driving force F_{el} .

Odakle sledi da je brzina kretanja čestice usled elektroforeze:

$$\vec{u} = \frac{Ze}{6\pi\eta a} \vec{E} = \mu_{jon} \vec{E}$$

Koeficijent proporcionalnosti između brzine čestice i električnog polja je jonska pokretljivost μ_{jon} . Ovo je izraz koji se koristi u biohemiji za sortiranje proteina i fragmenata DNA. Elektroforetsko kretanje čestica ne remeti okolni fluid u velikoj meri (Rid i Morison, 1976).

Elektroforeza je jedna od najčešće korišćenih tehnika za razdvajanje i/ili karakterizaciju naelektrisanih čestica, kao i bioloških molekula.

Grin i Morgan (Green and Morgan) su prvi pokazali da je moguće razdvojiti populaciju nanočestica (lateks perlice od 93nm) na dve subpopulacije usled razlike u njihovim dielektroforetskim svojstvima, pomoću nizova mikroelektroda. Ovo je doprinelo velikoj primeni u razdvajanju malih, a opet sličnih veličina čestica sa različitim biološkim svojstvima, uključujući hromosome, viruse, DNK i druge makromolekule.

Najčešće se u primeni dielektroforeze koristi AC električno polje. Pod slabim električnim poljem, dielektroforetski efekti su nadjačani elektrokinetičkim efektima i difuzijom, s obzirom da elektroforeza efekat drugog reda u primenjenom električnom polju.

11.2. Debajeva dužina

Posmatramo elektrolit koji je u kontaktu sa čvrstom površi. Zavisno od hemijskog sastava zida i od hemijskog procesa između elektrolitu i zida dolazi do transfera naelektrisanja između zida i elektrolita. Posledica toga je suprotno naelektrisanje zida i elektrolita, pri čemu ako ih posmatramo zajedno oni su elektro neutralni. Na slici je prikazana raspodela jona u elektrolitu.

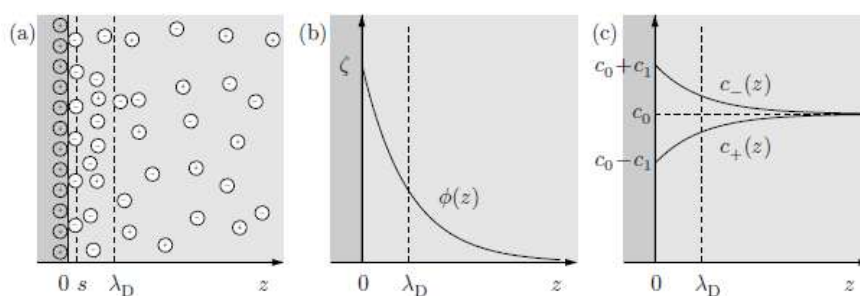


Fig. 3.3 (a) The ionic structure in thermal equilibrium of the Debye layer in an electrolyte (light gray, $x > 0$) near a solid surface in the xy -plane after charge transfer between the solid (dark gray, $z < 0$) and the electrolyte has taken place. For $0 < z < s$ lies the single layer of immobile counterions, the Stern layer. For $s < z < \lambda D$ follows the diffuse mobile layer of predominantly counterions. For $z > \lambda D$ the electrolyte is charge neutral. (b) The simple continuous field model for the electric potential $\phi(z)$ in the Debye layer. The potential at the Stern layer next to the surface takes the value $\phi(0) = \zeta$, while it decays to zero in the bulk on the length scale given by the Debye length λD . (c) The corresponding ionic densities $c_+(z)$ and $c_-(z)$ in the Debye layer.

Jednačina na osnovu koje se definiše raspodela koncentracije pozitivnih i negativnih jona proizilazi iz termodinamičkog izraza za hemijski potencijal pozitivnih i negativnih jona :

$$\mu_{\pm}(r) = \mu_0 + k_B T \ln \left[\frac{c_{\pm}(r)}{c_0} \right] \pm Ze\phi(r)$$

Gde su μ_0 i c_0 hemijski potencijal i koncentracija jona kada nema električnog potencijala, a $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K Bolcmanova konstanta.

Ako je sistem u termodinamičkoj ravnoteži to znači da je hemijski potencijal konstantan u celom sistemu pa je $\nabla\mu_{\pm}(r) = 0$. Tada je

$$k_B T \nabla \ln \left[\frac{c_{\pm}(r)}{c_0} \right] = \mp Ze \nabla \phi(r)$$

U cilju formiranja graničnih uslova pretpostavlja se da daleko od zida koncentracije i pozitivnih i negativnih jona teže zajedničkoj vrednosti c_0 i da je vrednost potencijala na zidu ζ , a daleko od zida 0.

$$c_{\pm}(\infty) = c_0, \phi(\infty) = 0, \phi(0) = \zeta$$

Sledi rešenje za koncentraciju jona

$$c_{\pm}(r) = c_0 e^{\mp \frac{Ze\phi(r)}{k_B T}}$$

Sada se može odrediti i funkcija gustine naelektrisanja:

$$\begin{aligned} \rho_{el}(r) &= Ze [c_+(r) - c_-(r)] \\ \rho_{el}(r) &= Ze \left[c_0 e^{-\frac{Ze\phi(r)}{k_B T}} - c_0 e^{+\frac{Ze\phi(r)}{k_B T}} \right] = -2Zec_0 \sinh \left[\frac{Ze\phi(r)}{k_B T} \right] \end{aligned}$$

Ako se ovaj izraz za gustinu naelektrisanja zameni u Poisson-ovu jednačinu sledi Poisson-Boltzman-ova jednačina:

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{2Zec_0}{\epsilon} \sinh \left[\frac{Ze\phi(r)}{k_B T} \right] \quad \left(\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$$

Na osnovu ove jednačine može se numerički ili u nekim slučajevima analitički odrediti raspodela električnog potencijala $\phi(r)$. Jedno od analitičkih rešenja nalazi se za uslov da ϕ zavisi samo od koordinate z :

$$\phi(z) = \frac{4k_B T}{Ze} \operatorname{arctanh} \left[\tanh \frac{Ze\zeta}{4k_B T} \cdot e^{-\frac{z}{\lambda_D}} \right]$$

Gde je λ_D Debajeva dužina:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon k_B T}{2(Ze)^2 c_0}}$$

11.3. Debaj-Hakelova aproksimacija Debajevog sloja

Ovo rešenje se zasniva na pretpostavci da je električna energija mnogo manja u odnosu na termičku energiju :

$$Ze\zeta \ll k_B T$$

Koristeći aproksimaciju da je za malo x : $\sinh(x) \approx x$, Poisson-Boltzman-ova jednačina svodi se na

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{2(Ze)^2 c_0}{\epsilon k_B T} \phi(r) = \frac{1}{\lambda_D^2} \phi(r)$$

Ako je u pitanju električno polje oko ravne ploče ili između dve paralelne ploče I ako se ono menja samo sa jednom koordinatom z koja je upravna na ploču, Poisson-Boltzman-ova jednačina je

$$\nabla^2 \phi(z) = \frac{1}{\lambda_D^2} \phi(z)$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine je

$$\phi(z) = C_1 e^{\frac{z}{\lambda_D}} + C_2 e^{-\frac{z}{\lambda_D}}$$

Primenom graničnog uslova za **ravnu ploču** $\phi(0) = \zeta$, $\phi(\infty) = 0$ sledi rešenje

$$\phi(z) = \zeta e^{-\frac{z}{\lambda_D}}$$

Sada se gustina naelektrisanja nalazi iz Poisson-ove jednačine

$$(-\nabla^2 \phi(z) = \frac{\rho_{el}(z)}{\epsilon})$$

$$\rho_{el}(z) = -\epsilon \nabla^2 \phi(z) = \frac{-\epsilon \zeta}{\lambda_D^2} e^{-\frac{z}{\lambda_D}}$$

Za kanal sa paralelnim pločama $(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2})$ granični uslov je

$$\phi\left(\pm \frac{h}{2}\right) = \zeta :$$

$$\phi(z) = \zeta \frac{\cosh \frac{z}{\lambda_D}}{\cosh \frac{h}{2\lambda_D}}$$

$$\rho_{el}(z) = -\varepsilon \nabla^2 \phi(z) = \frac{-\varepsilon \zeta}{\lambda_D^2} \frac{\cosh \frac{z}{\lambda_D}}{\cosh \frac{h}{2\lambda_D}}$$

Za cev poluprečnika R Poisson-Boltzman-ova jednačina u polarnim koordinatama je

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] \phi(r) = \frac{\phi(r)}{\lambda_D^2}$$

i graničnim uslovom $\phi(R) = \zeta$:

$$\phi(r) = \zeta \frac{J_0 \frac{r}{\lambda_D}}{J_0 \frac{R}{\lambda_D}}$$

$$\rho_{el}(r) = -\varepsilon \nabla^2 \phi(r) = -\frac{\varepsilon}{\lambda_D^2} \phi(r) = \frac{-\varepsilon \zeta}{\lambda_D^2} \frac{J_0 \frac{r}{\lambda_D}}{J_0 \frac{R}{\lambda_D}}$$

gde je J_0 Bessel-ova funkcija prve vrste nultog reda.

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}}{m!(n+m)!}$$

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m!m!} = 1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots$$

11.4 Elektroosmoza

Ako se tečnost ili rastvor nalaze u elektromagnetnom polju na fluid će osim uobičajenih sila koje se javljaju u klasičnoj mehanici fluida delovati i električna sila $\rho_{el}\vec{E}$, gde je ρ_{el} gustina naelektrisanja, a \vec{E} električno polje koje je jednako negativnom gradijentu električnog potencijala tog polja $\vec{E} = -\nabla\phi$.

Sada je Navier-Stokes-ova jednačina:

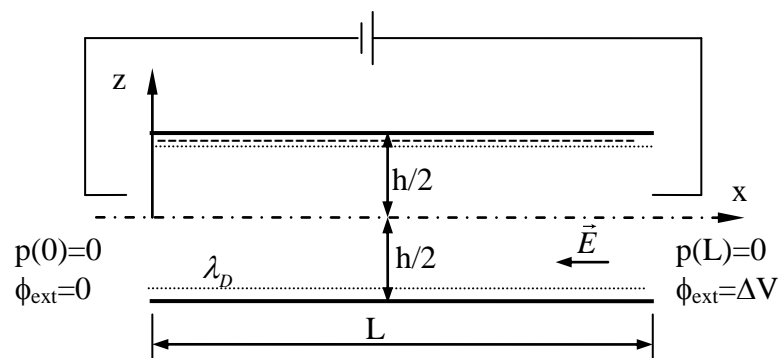
$$\rho \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{U} + \rho \vec{g} + \rho_{el} \vec{E}$$

Dve elektrode se postavljaju na krajeve kanala što dovodi do stvaranja spoljašnjeg električnog polja \vec{E}_{ext} . Naponska razlika između ulaza i izlaza je $\Delta\phi_{ext} = \Delta V$, a intenzitet spoljašnjeg električnog polja je

$$\vec{E}_{ext} = -\nabla\phi_{ext} = -\frac{\partial\phi_{ext}}{\partial x}\vec{i}$$

Pod pretpostavkama da je posmatrano strujanje:

1. stacionarno,
2. potencijal ζ je konstantan duž zida,
3. električno polje je homogeno,
4. jednodimenzijnsko strujanje (jedna komponenta brzine koja se menja samo sa koordinatom z),
5. nema razlike pritiska između ulaznog i izlaznog preseka.



N. S. jednačina za x pravac svodi se na:

$$0 = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho_{el} E_{ext}$$

Uzimajući u obzir Poisson-ovu jednačinu za gustinu naelektrisanja

$$0 = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \varepsilon \nabla^2 \phi E_{ext}$$

tj.

$$0 = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \varepsilon E_{ext} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[u + \frac{\varepsilon E_{ext}}{\eta} \phi(z) \right] = 0$$

$$u + \frac{\varepsilon E_{ext}}{\eta} \phi(z) = C_1 z + C_2$$

Za strujanje između paralelnih ploča granični uslov je

$$u\left(\pm \frac{h}{2}\right) = 0, \quad \phi\left(\pm \frac{h}{2}\right) = \zeta, \text{ pa je } C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{\varepsilon E_{ext} \zeta}{\eta}. \text{ Profil brzine}$$

pri pomenutim uslovima je

$$u = \frac{\varepsilon E_{ext}}{\eta} (\zeta - \phi(z))$$

Ako se uzme u obzir raspodela potencijala između dve paralelne ploče dobija se

$$u = \frac{\varepsilon E_{ext} \zeta}{\eta} \left(1 - \frac{\cosh \frac{z}{\lambda_D}}{\cosh \frac{h}{2\lambda_D}} \right) = u_{eo} \left(1 - \frac{\cosh \frac{z}{\lambda_D}}{\cosh \frac{h}{2\lambda_D}} \right)$$

gde je u_{eo} elektroosmotska brzina. Elektroosmotska pokretljivost

analogna je jonskoj pokretljivosti i definiše se kao:

$$u_{eo} = \mu_{eo} E_{ext}, \quad \mu_{eo} = \frac{\varepsilon \zeta}{\eta}.$$

Karakteristične vrednosti za elektroosmotsko strujanje $\zeta \approx 100 \text{ mV}$,

$$\varepsilon_{H_2O} \approx 7 \cdot 10^{-10} \text{ F/m}, \quad \eta_{H_2O} \approx 1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} \rightarrow \mu_{eo} \approx 7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}};$$

$$\Delta V \approx 30 \text{ V}, \quad L \approx 2 \text{ mm} \rightarrow E_{ext} = 0,015 \text{ V/m} \quad u_{eo} \approx 1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

Treba imati u vidu da Debaj-Hakelova aproksimacija Debajevog sloja koja se zasniva na pretpostavci da je električna energija mnogo manja u odnosu na termičku energiju $Ze\zeta \ll k_B T$ sada ne važi. Naime sada

je $\frac{e\zeta}{k_B T} \approx 4$ (a trebalo bi za Debaj-Hakelovu aproksimaciju da bude

$\frac{e\zeta}{k_B T} \ll 1$, ali bez obzira na to dobijeno rešenje je kvalitativno dobra

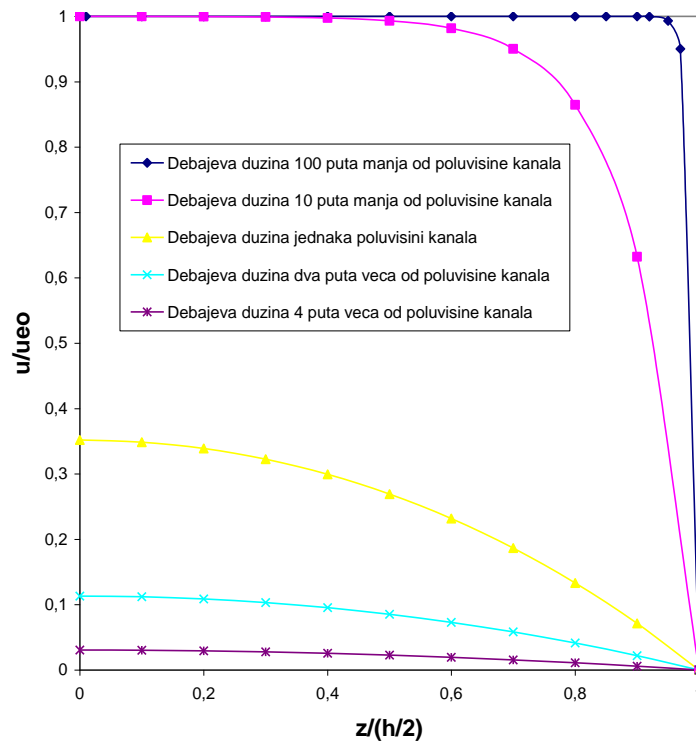
aproksimacija.

Na slici je dat profil brzine za elektroosmotsko strujanje fluida za različite odnose debljine Debajevog sloja i poluvisine kanala.

Uočava se da u slučaju kada je Debajeva dužina mnogo manja od

poluvisine kanala $\lambda_D \ll \frac{h}{2}$ profil brzine je skoro uniforman i može se

prihvatiti aproksimacija da je $u = u_{eo}$.



Tada je protok:

$$\dot{V} = w \int_{-h/2}^{h/2} u_{eo} dz = w u_{eo} h$$

Ako nije $\lambda_D \ll \frac{h}{2}$, protok se nalazi kao ($\int \cosh(x) dx = \sinh(x)$):

$$\dot{V} = w \int_{-h/2}^{h/2} u_{eo} \left(1 - \frac{\cosh \frac{z}{\lambda_D}}{\cosh \frac{h}{2\lambda_D}} \right) dz = w u_{eo} h \left(1 - \frac{2\lambda_D}{h} \tanh \frac{h}{2\lambda_D} \right)$$

Kada je $\lambda_D > \frac{h}{2}$, brzina fluida u poprečnom preseku je znatno manja

od u_{eo} . To se pri standardnim uslovima dešava ako je poluprečnik kanala manji od 10nm.

Na isti način mogu se dobiti i jednačine za profil brzine i protok pri strujanju tečnosti kroz cev.

$$u = \frac{\varepsilon E_{ext} \zeta}{\eta} \left(1 - \frac{J_0 \frac{r}{\lambda_D}}{J_0 \frac{R}{\lambda_D}} \right) = u_{eo} \left(1 - \frac{J_0 \frac{r}{\lambda_D}}{J_0 \frac{R}{\lambda_D}} \right)$$

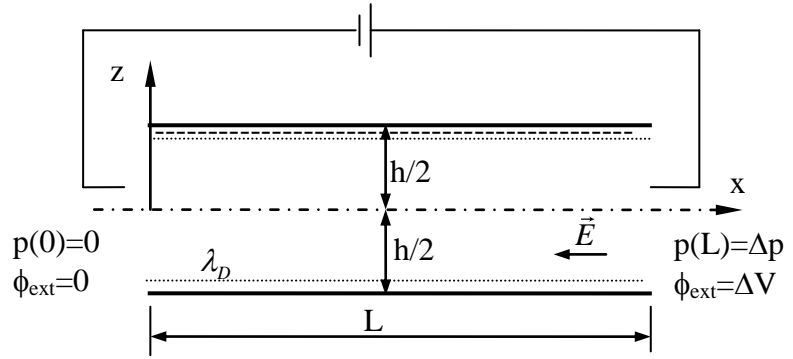
$$\lambda_D \ll R: \dot{V} = \int_0^R 2\pi r u_{eo} dr = \pi r^2 u_{eo}$$

Strujanje tečnosti pri elektroosmozi i postojanju razlike pritiska između ulaza i izlaza

U ovom poglavlju razmatra se strujanje između paralelnih ploča kod kojih postoji razlika potencijala između ulaza i izlaza ΔV (isto kao u predhodnom slučaju), ali osim toga postoji i razlika pritiska između ulaza i izlaza Δp . Pretpostavlja se da se spoljašnji električni potencijal i pritisak menjaju linearno duž kanala. Takođe pretpostavlja se da je zid pozitivno nalektrisan, a Debajev sloj negativno.

$$\vec{E} = -\nabla \phi_{ext} = -\frac{\partial \phi_{ext}}{\partial x} \vec{i} = -\frac{\Delta V}{L} \vec{i}$$

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} = -\frac{\Delta p}{L} \vec{i}$$



Navije-Stoksova jednačina koja opisuje ovo jednodimenzijnsko stacionarno strujanje tečnosti je:

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho_{el} \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial x}$$

Ili

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho_{el} \frac{\Delta V}{L} - \frac{\Delta p}{L} = 0$$

Uzimajući u obzir Poisson-ovu relaciju za gustinu naelektrisanja

$$\rho_{el}(z) = -\nabla^2 \phi(z) \epsilon$$

sledi:

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \nabla^2 \phi(z) \epsilon \frac{\Delta V}{L} - \frac{\Delta p}{L} = 0$$

tj.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \epsilon \frac{\Delta V}{\eta L} \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} - \frac{\Delta p}{\eta L} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[u + \epsilon \frac{\Delta V}{\eta L} \phi(z) \right] = \frac{\Delta p}{\eta L}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[u + \epsilon \frac{\Delta V}{\eta L} \phi(z) \right] = \frac{\Delta p}{\eta L} z + C_1$$

$$u + \epsilon \frac{\Delta V}{\eta L} \phi(z) = \frac{\Delta p}{\eta L} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

Konstante C_1 i C_2 nalaze se iz uslova:

$$z = \pm \frac{h}{2}: \quad u = 0, \quad \phi(z) = \zeta,$$

pa sledi da je $C_1 = 0$ i $C_2 = \varepsilon \frac{\Delta V}{\eta L} \zeta - \frac{\Delta p}{\eta L} \frac{h^2}{8}$. Izraz za profil brzine je

sada:

$$u = \varepsilon \frac{\Delta V}{\eta L} [\zeta - \phi(z)] + \frac{\Delta p}{2\eta L} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right)$$

Kako je za strujanje izmedju paralelnih ploča

$$\phi(z) = \zeta \frac{\cosh \frac{z}{\lambda_D}}{\cosh \frac{h}{2\lambda_D}}$$

Sledi da je

$$u = \varepsilon \frac{\zeta \Delta V}{\eta L} \left[1 - \frac{\cosh \frac{z}{\lambda_D}}{\cosh \frac{h}{2\lambda_D}} \right] + \frac{\Delta p}{2\eta L} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right)$$

$$\zeta \approx 100 \text{ mV}, \varepsilon_{H_2O} \approx 7 \cdot 10^{-10} \text{ F/m}, \eta_{H_2O} \approx 1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s},$$

$$\mu_{eo} \approx 7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}, (\mu_{eo} = \frac{\varepsilon \zeta}{\eta}), u_{eo} \approx 1 \frac{\text{mm}}{\text{s}},$$

$$(u_{eo} = \frac{\varepsilon \zeta E_{\text{ext}}}{\eta} = \mu_{eo} E_{\text{ext}} = \mu_{eo} \frac{\Delta V}{L}; \text{orijentacione vrednosti da bi se}$$

dobilo $u_{eo} \approx 1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}; \Delta V \approx 30 \text{ V}; L \approx 2 \text{ mm}$).

$$\dot{V} = w \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \varepsilon \frac{\zeta \Delta V}{\eta L} \left[1 - \frac{\cosh \frac{z}{\lambda_D}}{\cosh \frac{h}{2\lambda_D}} \right] + \frac{\Delta p}{2\eta L} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \right\} dz$$

$$\dot{V} = w \varepsilon \frac{\zeta \Delta V}{\eta L} h \left(1 - \frac{2\lambda_D}{h} \tanh \frac{h}{2\lambda_D} \right) - \frac{\Delta p w h^3}{12\eta L}$$

protok koji je posledica elektroosmoze
protok koji je posledica postojanja razlike pritiska na ulazu i izlazu

Postavlja se pitanje: Pri kom Δp će maseni protok biti 0? Tako nađeno Δp predstavlja kapacitet elektroosmotske pumpe, tj. koju razliku pritiska na ulazu i izlazu zamenjuje elektroosmoza.

$$\frac{\Delta p_{eo} w h^3}{12\eta L} = w \varepsilon \frac{\zeta \Delta V}{\eta L} h \left(1 - \frac{2\lambda_D}{h} \tanh \frac{h}{2\lambda_D} \right)$$

$$\Delta p_{eo} = \varepsilon \frac{12\zeta\Delta V}{h^2} \left(1 - \frac{2\lambda_D}{h} \tanh \frac{h}{2\lambda_D} \right)$$

$$\lambda_D = \frac{1}{4} \frac{h}{2}, \quad \varepsilon_{H_2O} \approx 7 \cdot 10^{-10} \text{ F/m}, \quad \zeta \approx 100 \text{ mV}, \quad \Delta V \approx 30 \text{ V}, \quad h = 1 \mu\text{m}$$

$$\Delta p_{eo} = 25200 \left(1 - \frac{1}{4} \tanh 4 \right) = 18904 \text{ Pa}$$