Dj. Koruga, D. Vasiljević, J. Šakota

Idealni optički sistem

2.1 Pojam idealnog optičkog sistema

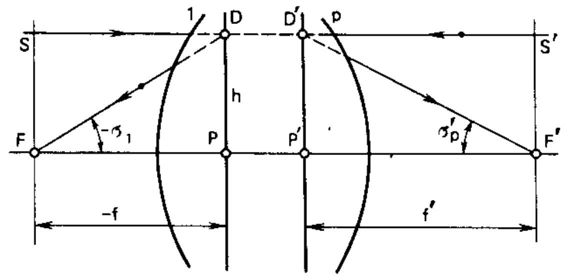
Idealni optički sistem formira stigmatičan lik predmeta. To znači da svakoj tački predmeta odgovara samo jedna tačka lika. Kod idealnih optičkih sistema, geometrijski oblik lika je sličan geometrijskom obliku predmeta, jer ne postoji izobličenje.
Stvarni optički sistemi ne mogu da formiraju stigmatičan lik predmeta. Ipak, ideja idealnog optičkog sistema se koristi radi projektovanja optičkih sistema, čija su odstupanja od idealnog u dozvoljenim granicama. Za kriterijum na osnovu koga se određuje dozvoljeno odstupanje realnog optičkog sistema od idealnog, koriste se karakteristike prijemnika, koji se nalazi iza optičkog sistema. U praksi je važno, da prijemnik ne registruje odstupanje realnog od idealnog lika.
Teorija idealnog optičkog sistema zasniva se na sledećim postavkama:

a) Svaka tačka u prostoru predmeta ima samo jednu odgovarajuću tačku u prostoru lika. Ove dve tačke se nazivaju spregnutim (konjugovanim) tačkama;
b) Svaka prava linija u prostoru predmeta ima samo jednu odgovarajuću liniju u prostoru lika. Ove linije se nazivaju spregnutim (konjugovanim) linijama;
c) Ako tačka u prostoru predmeta leži na pravoj, to i njoj spregnuta tačka u prostoru lika ležaće na pravoj, koja je spregnuta s pravom u prostoru predmeta;
d) Svakoj ravni u prostoru predmeta odgovara samo jedna ravan u prostoru lika. Ove dve ravni se nazivaju spregnutim (konjugovanim) ravnima.

Preko ovih predpostavki uspostavljena je geometriska veza izmedju prostora predmeta i prostora lika.

2.2 Osnovne (kardinalne) tačke

Poseban značaj u teoriji idealnog optičkog sistema imaju osnovne (kardinalne) tačke optičkog sistema. Kardinalne tačke se sastoje iz tri para tačaka, koje se nalaze na optičkoj osi svakog centriranog optičkog sistema i to su par glavnih tačaka, par žižnih tačaka i par čvornih tačaka. Ove tačke znatno pojednostavljuju određivanje položaja i veličine lika.
Koordinatni sistem u kojem se određuje položaj tačaka predmeta i odgovarajućih likova, postavlja se u par spregnutih ravni, normalnih na optičku osu sistema. U ovim ravnima, odnos veličine lika i predmeta je jednak jedinici (jedinično uvećanje). Položaj ovih, glavnih ravni, zavisi od konstrukcionih elemenata optičkog sistema. U najvećem broju praktičnih optičkih sistema glavne ravni su virtualne, jer se nalaze unutar optičkog sistema. Glavna ravan koja se nalazi u prostoru predmeta, naziva se prednja, ili prva glavna ravan. Glavna ravan koja se nalazi u prostoru lika, naziva se zadnja, ili druga glavna ravan. Tačke preseka glavnih ravni sa optičkom osom P i P’ nazivaju se glavne tačke, kao što je prikazano na slici 2.1.



Slika 2.1. Žiže i glavne tačke u optičkom sistemu

Ako bilo koji zrak, ili njegov produžetak, pri ulazu u optički sistem seče glavnu ravan u tački D, na visini h od optičke ose sistema, posle izlaska, on ili njegov produžetak seći će glavnu ravan u tački D', na istoj visini h od optičke ose sistema. Ova važna osobina glavnih ravni ima veliki značaj za određivanje putanje zraka kroz optički sistem.

Od mnoštva tačaka u oblasti prostora predmeta posmatraju se beskonačno udaljene tačke. Svaka svetla tačka, koja se nalazi u beskonačnosti, emituje paralelan snop zraka svetlosti. Ovaj snop zraka ulazi u osno simetrični optički sistem, koji ako je idealan, skuplja snop u jednu tačku na optičkoj osi. Ova tačka se naziva druga, ili zadnja žižna tačka i obeležava se sa F'. Žižna tačka je optički spregnuta sa beskonačno udaljenom tačkom. Ravan koja prolazi kroz zadnju žižnu tačku i koja je normalna na optičku osu, naziva se zadnja žižna ravan. Rastojanje duž optičke ose od zadnje glavne tačke do zadnje žižne tačke, naziva se zadnja žižna dužna i obeležava se sa f'.

Ako se zamisli da paralelan snop zraka dolazi sa desna na poslednju površinu idealnog optičkog sistema, tada će se snop, posle prolaska kroz optički sistem, skupiti u tački na optičkoj osi, koja se zove prva, ili prednja žižna tačka. Ravan koja prolazi kroz prednju žižnu tačku i koja je normalna na optičku osu, naziva se prednja žižna ravan. Rastojanje duž optičke ose, od prednje glavne tačke do prednje žižne tačke, naziva se prednja žižna dužna i obeležava se sa $-f$. Znak minus je zbog konvencije o znacima u optici. Ako se žiža nalazi u pravcu prostiranja svetlosti, posmatrano od njoj odgovarajuće glavne tačke, žižna dužina će biti pozitivna, u protivnom biće negativna.

Sa slike 2.1, moguće je odrediti jednačine za žižnu dužinu, kada snop zraka ulazi u optički sistem na visini h

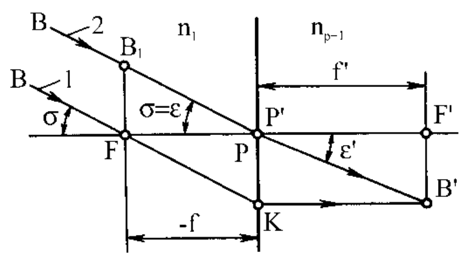
$$f' = \frac{h}{\tan\sigma'_p} \qquad \text{i} \qquad f = \frac{h}{\tan\sigma_1},$$

gde su:

σ'_p – ugao pod kojim zrak, koji izlazi iz optičkog sistema, seče optičku osu u prostoru lika,

σ_1 – ugao pod kojim zrak, propušten u suprotnom pravcu, seče optičku osu po izlasku iz optičkog sistema u prostoru predmeta.

Idealni optički sistem može se predstaviti kao beskonačno tanak optički sistem. Tada se prva i druga glavna ravan poklapaju. Na slici 2.2, prikazan je jedan takav optički sistem, koji je definisan sa žižnim dužinama f i f' i koji razdvaja sredine sa indeksima prelamanja n_1 i n_{p+1}. Neka tanak snop paralelnih zraka dolazi iz tačke B, koja se nalazi u beskonačnosti. Na slici 2.2 je prikazano određivanje lika beskonačno udaljene tačke B pomoću dva karakteristična zraka. Zrak označen sa 1, prolazi kroz prvu žižnu tačku F i ulazi u optički sistem u tački K. Taj zrak, napušta optički sistem, paralelno sa optičkom osom i dolazi na drugu žižnu ravan u tački B', koja je lik tačke B iz beskonačnosti. Tačan položaj tačke B' određuje presek zraka 1 i 2 u zadnjoj žižnoj ravni. Zrak označen sa 2, koji se zove glavni zrak, prolazi kroz centar poklopljenih glavnih ravni (tačke P i P'). On obrazuje sa optičkom osom upadni ugao ε, koji je jednak uglu σ. Zrak 2, izlazi iz optičkog sistema pod uglom ε' i prolazi kroz tačku B' u žižnoj ravni. Spregnute tačke u kojima glavni zrak bilo realno, bilo u svom virtualnom produžetku preseca optičku osu, nazivaju se čvornim tačkama optičkog sistema. Ravni koje prolaze kroz čvorne tačke, a normalne su na optičku osu, nazivaju se čvorne ravni. Žiže, glavne i čvorne tačke su osnovne (kardinalne) tačke optičkog sistema i sa njihovim položajem su određene osnovne karakteristike svakog centriranog optičkog sistema.



Slika 2.2. Prolazak paralelnog snopa zraka kroz idealni optički system

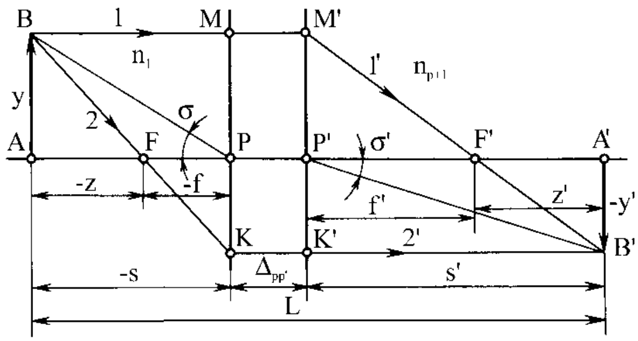
Sa slike 2.2, može se zaključiti da $|FB_1| = |PK| = |F'B'|$ odnosno $-f \cdot \tan\varepsilon = f' \cdot \tan\varepsilon'$. Za male vrednosti uglova ε i ε', tangens ugla je približno jednak sinusu ugla, te se može napisati $-f \cdot \sin\varepsilon = f' \cdot \sin\varepsilon'$. Na osnovu Snell – Descartesovog zakona, odnos sinusa upadnog i prelomnog ugla je jednak odnosu indeksa prelamanja, te se dobija

$$\frac{-f}{f'} = \frac{n_1}{n_{p+1}}. \qquad (2.1)$$

Odnos žižnih dužina u idealnom optičkom sistemu je jednak odnosu indeksa prelamanja sredine ispred i iza optičkog sistema, sa znakom minus ispred. Znak minus pokazuje da žižne ravni F i F' leže sa suprotnih strana glavnih ravni, koje se poklapaju. Kada se optički sistem nalazi u vazduhu, što je i najčešći slučaj, tada je $n_1 = n_{p+1} = 1$, odnosno $f' = -f$, tj. prednja i zadnja žižna dužina su numerički jednake.

2.3 Osnovne relacije predmet – lik u geometrijskoj optici

U ovom poglavlju, biće izvedene jednačine koje povezuju tačke predmeta i lika, kao što je pokazano na slici 2.3. Optički sistem je predstavljen sa glavnim ravnima. Predmet je duž AB, dužine y, koja je normalna na optičku osu. Optički sistem stvara lik tačke B u tački B', koja nastaje kao presek dva zraka u prostoru lika, koji su spregnuti sa dva zraka, koji su krenuli iz tačke B u prostoru predmeta.



Slika 2.3. Osnovne relacije između predmata i lika

Zrak 1, prostire se paralelno sa optičkom osom do tačke M' na drugoj glavnoj ravni, gde menja pravac i postaje spregnuti zrak 1', koji prolazi kroz zadnju žižu F'. Zrak 2 polazi od tačke B u prostoru predmeta i prolazi kroz prednju žižu F. On menja svoj pravac u tački K, na prvoj glavnoj ravni i postaje spregnuti zrak 2', koji se prostire paralelno sa optičkom osom. Zraci 1' i 2' seku se u tački B', koja predstavlja lik tačke B.
Položaj spregnutih tačaka A i A', koje se nalaze na optičkoj osi i spregnutih duži AB i A'B', normalnih na optičku osu, određen je u odnosu na žiže F i F' koordinatama z i z', a u odnosu na glavne ravni P i P', koordinatama s i s'. Na osnovu sličnih trouglova ABF i FPK, dobija se odnos veličine predmeta i veličine lika

$$\frac{-y'}{y} = \frac{-f}{-z}. \tag{2.2}$$

Na osnovu sličnih trouglova A'B'F' i F'P'M', dobija se, takođe, odnos veličine predmeta i veličine lika

$$\frac{-y'}{y} = \frac{z'}{f'}. \tag{2.3}$$

Izjednačavanjem desnih strana jednačina (2.2) i (2.3), dobija se Newtonov oblik jednačine konjugacije

$$z \cdot z' = f \cdot f'. \tag{2.4}$$

Newtonov oblik jednačine konjugacije prelazi u Gaussov oblik ako se sa spegnutih rastojanja, koja se mere do žiže, pređe na spregnuta rastojanja, koja se mere do glavnih ravni $z = s - f$ i $z' = s' - f'$

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1. \tag{2.5}$$

Ako se optički sistem nalazi u vazduhu tada je $f' = -f$, pa Newtonov i Gaussov oblik jednačine konjugacije dobijaju sledeće oblike:

– Newtonov oblik jednačine konjugacije

$$z \cdot z' = -f'^2, \tag{2.6}$$

– Gaussov oblik jednačine konjugacije

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}. \tag{2.7}$$

Visina prodora zraka u prostoru predmeta je

$$h = s \cdot \tan\sigma. \tag{2.8}$$

Visina prodora zraka u prostoru lika je

$$h' = s' \cdot \tan\sigma'. \tag{2.9}$$

U specijalnom slučaju, kada je rastojanje predmeta od žižne ravni jednako rastojanju žižne ravni do glavne ravni, tada su veličine predmeta i lika jednake

$$h = s \cdot \tan\sigma = s' \cdot \tan\sigma'. \tag{2.10}$$

Zamenom $s = z + f$ i $s' = z' + f'$ u jednačinu (2.10) i uzimajući u obzir da je na osnovu jednačine (2.2) $z = -\frac{y \cdot f}{y'}$ i da je na osnovu jednačine (2.3) $z' = -\frac{y' \cdot f'}{y}$ dobija se

$$f \cdot y \cdot \tan\sigma = -f' \cdot y' \cdot \tan\sigma'. \tag{2.11}$$

Jednačina (2.11) naziva se jednačina tangensa Lagrange – Helmholtza. Ona definiše uslov za formiranje lika u idealnom optičkom sistemu: Proizvod veličine predmeta, žižne dužine i tangensa upadnog ugla treba da je jednak proizvodu veličine lika, žižne dužine i tangensa prelomnog ugla sa suprotnim predznakom. Zamenom $\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$, jednačina (2.11) transformiše se u

$$n \cdot y \cdot \tan\sigma = n' \cdot y' \cdot \tan\sigma'. \tag{2.12}$$

Jednačina (2.12) naziva se Lagrange – Helmholtzova invarijanta za idealni optički sistem.

2.4 Uvećanje optičkog sistema

2.4.1 Poprečno uvećanje

Poprečno uvećanje je odnos veličine lika y' i predmeta y, koji su postavljeni upravno na optičku osu

$$\beta = \frac{y'}{y}. \tag{2.13}$$

Negativna vrednost poprečnog uvećanja znači da se lik u odnosu na predmet nalazi sa suprotne strane optičke ose. Za idealni optički sistem sa kružnom simetrijom, poprečno uvećanje je isto u celom prostoru lika. Položaj lika tačke moguće je odrediti ako je poznato poprečno uvećanje i žižna dužina f'. Sa slike 2.3, vidi se da je

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{z} = -\frac{z'}{f'}. \tag{2.14}$$

Zamenom $z = s - f$ i $z' = s' - f'$ dobija se

$$s = \frac{(\beta - 1)\cdot f}{\beta} = \frac{n_1}{n_{p+1}} \cdot \frac{1-\beta}{\beta} \cdot f', \tag{2.15}$$

$$s' = (1-\beta)\cdot f'. \tag{2.16}$$

Ako se optički sistem nalazi u vazduhu, što je najčešći slučaj, tada je $n_1 = n_{p+1} = 1$, pa se dobija

$$s = \frac{1-\beta}{\beta} \cdot f'. \tag{2.17}$$

Ako je poznato rastojanje L, između tačke predmeta i tačke lika, rastojanje Δ_{pp}, između prednje i zadnje glavne ravni, i poprečno uvećanje β, moguće je proračunati žižnu dužinu, rastojanje predmeta i rastojanje lika do odgovarajuće glavne ravni kao

$$f' = -\frac{(L - \Delta_{pp})\cdot \beta}{(1-\beta)^2}, \tag{2.18}$$

$$s = -\frac{L - \Delta_{pp}}{1-\beta}, \tag{2.19}$$

$$s' = -\frac{(L - \Delta_{pp})\cdot \beta}{1-\beta}. \tag{2.20}$$

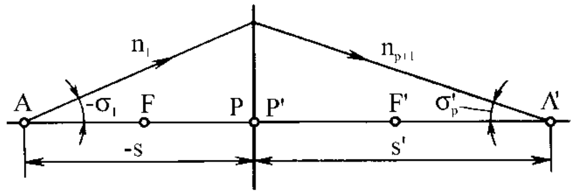
2.4.2 Ugaono uvećanje i čvorne tačke

Ugaono uvećanje optičkog sistema se definiše kao odnos tangensa uglova koje formira zrak sa optičkom osom, u prostoru lika i prostoru predmeta

$$\gamma = \frac{\tan\sigma'_p}{\tan\sigma_1}. \tag{2.21}$$

Za beskonačno tanak idealni optički sistem, prikazan na slici 3.4, ugaono uvećanje je

$$\gamma = \frac{s}{s'}. \tag{2.22}$$



Slika 2.4. Ugaono uvećanje

Važno je primetiti da ugaono uvećanje γ kod beskonačno tankog idealnog optičkog sistema, ne zavisi od uglova pod kojim zraci presecaju optičku osu (σ_1 i σ'_p). Za dati par spregnutih tačaka, ugaono uvećanje je konstantno bez obzira na veličinu tih uglova.
Veza između ugaonog i poprečnog uvećanja je

$$\gamma = \frac{n_1}{n_{p+1}} \cdot \frac{1}{\beta}. \tag{2.23}$$

Spregnute tačke na osi koje imaju jedinično ugaono uvećanje, zovu se čvorne tačke optičkog sistema. Te tačke se obično označavaju sa N i N'. Geometrijski posmatrano, zrak, koji ulazi u optički sistem, usmeren ka tački na osi N (prednja čvorna tačka), napustiće optički sistem kao zrak, koji polazi iz tačke na osi N' (zadnja čvorna tačka). Pri tome će ulazni i izlazni zrak zaklapati isti ugao sa optičkom osom. Jednačina (2.23) pokazuje, da ako je ista sredina sa obe strane optičkog sistema, tada se čvorne tačke poklapaju sa glavnim tačkama, za koje je poprečno uvećanje $\beta = 1$.

2.4.3 Uzdužno uvećanje

Uzdužno uvećanje optičkog sistema je odnos beskonačno malog segmenta u prostoru lika i odgovarajućeg segmenta u prostoru predmeta. Segmenti su spregnuti i nalaze se duž optičke ose

$$\alpha = \frac{dz'}{dz}. \tag{2.24}$$

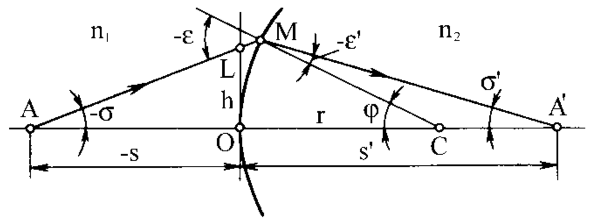
Veza između ugaonog, poprečnog i uzdužnog uvećanja je

$$\alpha = \frac{n_{p+1}}{n_1} \cdot \beta^2, \tag{2.25}$$

$$\alpha \cdot \gamma = \beta. \tag{2.26}$$

2.5 Paraksijalna aproksimacija

Paraksijalna oblast je oblast beskonačno blizu optičke ose u kojoj svi uglovi imaju male vrednosti, pa se može pretpostaviti da je $\sin\sigma \approx \tan\sigma \approx \sigma$ i $\cos\sigma \approx 1$. U paraksijalnoj optici posmatraju se centrirani optički sistemi, koji se sastoje od određenog broja prelomnih i ogledalnih površina, čiji se centri krivina nalaze na optičkoj osi. Na slici 2.5 prikazane su osnovne veličine koje se koriste u paraksijalnoj aproksimaciji.



Slika 2.5. Obeležavanje za paraksijalni hod zraka

Na osnovu slike 2.5, lako se mogu izvesti sledeće jednačine

$$\sin\varepsilon = \frac{r-s}{r}\cdot\sin\sigma\,,$$
$$\sin\varepsilon' = \frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\varepsilon\,,\qquad (2.27)$$
$$\sigma' = \sigma - \varepsilon + \varepsilon'\,,$$
$$s' = r\cdot\left(1-\frac{\sin\varepsilon'}{\sin\sigma'}\right).$$

Ako se jednačine (2.27) napišu u invarijantnoj formi dobija se

$$n_1\cdot(s-r)\cdot\sin\sigma = n_2\cdot(s'-r)\cdot\sin\sigma'\,,\qquad (2.28)$$

gde su:

n_1, n_2 – indeksi prelamanja sredina ispred i iza sferne površine,

r – radijus krivine sferne površine,

s, s' –rastojanje predmeta i lika od temena sferne površine mereno duž optičke ose,

σ, σ' –ugao koji upadni i prelomni zrak formiraju sa optičkom osom,

$\varepsilon, \varepsilon'$ –ugao koji upadni i prelomni zrak obrazuju sa normalom na optičku površinu.

Teorija preslikavanja u geometrijskoj optici zasniva se na pretpostavci da je predmet skup svetlih tačaka. Iz svih tačaka predmeta polazi uzan snop direktno emitovane, odbijene ili rasute svetlosti. Ako se svi zraci koji su pošli iz jedne tačke predmeta seku u jednoj tački lika, tada se taj snop zraka zove homocentričnim. Jedan od ciljeva prilikom projektovanja optičkog sistema je da snop zraka zadrži homocentrična svojstva nakon prolaska kroz optički sistem.

U opštem slučaju, homocentričnost u paraksijalnoj optici nije očuvana, jer je rastojanje lika s' funkcija rastojanja predmeta s i upadnog ugla σ. Uslov da homocentričnost snopa zraka bude očuvana je

$$\frac{\sin\sigma}{\sin\sigma'} = const. \tag{2.29}$$

Ovaj uslov ispunjen je u samo nekoliko specifičnih slučajeva i kada su uglovi koje gradi upadni i prelomni zrak sa optičkom osom σ i σ' mali po apsolutnoj vrednosti. Slika 2.5 prikazuje zrak koji polazi sa optičke ose pod malim uglom σ i dolazi na prelomnu površinu sa malom visinom h. Ovi uslovi podrazumevaju i male vrednosti za uglove φ i σ'. Za sve te male uglove moguće je u prvoj aproksimaciji, zameniti tangense uglova sa samim uglovima izraženim u radijanima. Na osnovu ovoga, uslov homocentričnosti postaje

$$\frac{\sin\sigma}{\sin\sigma'} \approx \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{s'}{s} = \text{const}. \tag{2.30}$$

Rastojanje lika tačke od temena prelomne površine definisano je jednačinom

$$s' = \frac{n_2 \cdot r \cdot s}{(n_2 - n_1)\cdot s + n_1 \cdot r}. \tag{2.31}$$

Za datu vrednost rastojanja predmeta s, rastojanje lika s' je konstantno i nezavisno od ugla σ. Znači, homocentričnost snopa zraka posle prelamanja na sfernoj površini je očuvana. Optički sistem sa centriranim površinama se ponaša kao idealni sistem, ako u njega ulazi snop zraka na maloj visini, koji polazi sa optičke ose i sa njom zaklapa mali ugao. Ti zraci se zovu Gaussovi ili paraksijalni zraci, a oblast u kojoj se primenjuju ti zraci se zove Gaussova ili paraksijalna aproksimacija (Gaussova ili paraksijalna optika).

Zbog malih uglova sa kojima se radi u paraksijalnoj aproksimaciji, sferne površine se mogu zameniti sa ravnima koje prolaze kroz teme sferne površine. Može se smatrati da zrak dolazi samo do tačke L, koja se nalazi na ravani koja prolazi kroz teme sferne površine, a ne do tačke M na sfernoj površini, kao što je prikazano na slici 2.5. Ova pretpostavka znatno pojednostavljuje sve dalje proračune. Jednačina (2.31) se može napisati i u obliku

$$n_1 \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right) = n_2 \cdot \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{r}\right). \tag{2.32}$$

Jednačina (2.32) poznata je kao Abbeova invarijanta za sfernu prelomnu površinu. Treći oblik ove jednačine je

$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n_2 - n_1}{r}. \tag{2.33}$$

Jednačine (2.31), (2.32) i (2.33) povezuju rastojanje predmeta i lika od temena prelomne površine u paraksijalnoj oblasti. Za reflektujuću sfernu površinu ($n_2 = -n_1$), jednačina (2.33) dobija oblik

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r}. \tag{2.34}$$

Proračun hoda paraksijalnog zraka kroz složeni optički sistem vrši se postepeno. Prvo se sračuna rastojanje lika od sferne prelomne površine, zatim lik postaje predmet za sledeću prelomnu površinu. Jednačina transfera sa jedne prelomne površine na drugu ima oblik

$$s_2 = s_1' - d_1, \tag{2.35}$$

gde je d_1 rastojanje između dve prelomne površine.

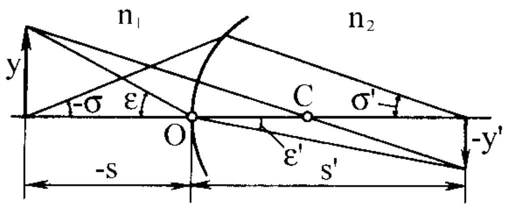
2.6 Optička invarijanta

Snell – Descartesov zakon u paraksijalnoj oblasti ima oblik

$$n_1 \cdot \varepsilon = n_2 \cdot \varepsilon'. \tag{2.36}$$

U paraksijalnoj oblasti, odnos veličine lika i predmeta prikazanih na slici 2.6, dat je jednačinom

$$\frac{-y'}{y} = \frac{s' \cdot \varepsilon'}{-s \cdot \varepsilon}. \tag{2.37}$$



Slika 2.6. Lagrange - Helmholtzova invarijanta

Ako se u jednačinu (2.37) uvrsti jednačina (2.36) i, znajući da za paraksijalnu oblast važi jednačina (2.30), dobija se

$$\frac{-y'}{y} = \frac{s' \cdot n_1}{-s \cdot n_2} = \frac{n_1 \cdot \sigma}{-n_2 \cdot \sigma'},$$

odnosno,

$$n_1 \cdot y \cdot \sigma = n_2 \cdot y' \cdot \sigma'. \tag{2.38}$$

Jednačinu (2.38) je nezavisno jedan od drugoga pronašlo više naučnika, pa zato i ima više naziva, kao što su Lagrangeov zakon, ili Smith – Helmholtzova jednačina. Veličina sa bilo koje strane jednakosti se zove Lagrange – Helmholtzova invarijanta, ili jednostavno, optička invarijanta. Kako je $\frac{n_1}{n_2} = \frac{-f}{f'}$, jednačina (2.37) se može napisati u obliku

$$f \cdot y \cdot \sigma = -f' \cdot y' \cdot \sigma'. \tag{2.39}$$

Jednačine (2.38) i (2.39) mogu se koristiti za proračun optičkih sistema sa proizvoljnim brojem sfernih površina u paraksijalnoj oblasti. Za optički sistem sastavljen od p površina moguće je napisati

$$n_1 \cdot y_1 \cdot \sigma_1 = n_2 \cdot y_2' \cdot \sigma_2' = \ldots = n_{p+1} \cdot y_p' \cdot \sigma_p' , \qquad (2.40)$$

gde se indeks 1 odnosi na prostor predmeta prve površine, a indeks $p+1$ odnosi na prostor lika poslednje površine. Za refleksnu površinu $n_2 = -n_1$, Lagrange – Helmholtzova invarijanta se redukuje na dva člana

$$y \cdot \sigma = -y' \cdot \sigma' . \qquad (2.41)$$